MATHESEOS AD MIXTAM RECENTIORUM PHILOSOPHIAM NECESSARIAE...

Paolo abate cistercense Pancaldi

Digitized by Google

MATHESEOS
AD MIXTAM
RECENTIORVM
HILOSOPHIAM NECESSARIÆ
ELEMENTA

N METHODO NATVRALI
NUNC PRIMUM
DEMONSTRATA

TOMVS. I.

GENUÆ.

YPOGRAPHIA GEXINIANA,
OLIM LERZIANA

MDCCLIII.

BIBLIOTECA NAZ.
ROMA
VITTORIO EMANUELE

SUPERIORUM PERMISSU.

Digitized by Google

172

Digitized by Google

AD LECTOREM EDITOR.

Quæ ad horum elementorum Matheseos editionem me excitaverint, si nitide hic tibi aperiam, cum levia præsertim omnino non sint, injucundum tibi fore, Lector Benevole, minime suspicor. Compertum est Physicam selectiorem iis esse inaccessam, qui in Arithmeticà, & Algebra, in elementari, & sublimiori Geometriâ, in utrâque Trigonometriâ dudum, & seriò non sint exercitati; eamq; ob rem harum Disciplinarum studium cum Philosophiæ studio in Recentiorum scholis arctissimè coniungi. Itaque cum in tantà Mathematicorum frequentia neminem reperiam qui partes hasce simul, & seorsim omnes ediderit, inde necessariò factum iri puto, ut diversæ partes diversâ methodo a diversis pertractatæ ex-

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

Digitized by Google

plicentur; ex quo quæ, & quanta consequantur incommoda, dici vix potest. Si diversas corporis alicujus partes peritissimi, & cum cum Apelle ipso comparandi in pingendo Uiri describant, quin tamen earum nexum, ordinemque sibi ob oculos ponant; certe ubi ad eas coaptandas convenient, informe monstrum ex hujusmodi coniunctione exurgere mirabuntur. Quodsi ergo cuidam veluti tabulæ mens humana comparatur, in qua facultatum nostrarum usu, atque exercitio, Institutorum præceptis, scriptisque Authorum scientiæ quodammodo depinguntur, haud vereor confidenter asserere Mathesin in tua mente impressum iri minime cohærentem, nullo modo sibi in partium relatione, atque ordine respondentem, ubi partem unam apud Euclidem legas, aliam excipias ab Apollonio, in hac Theodosium consulas, in illa Archimedem. Idcircò elementa hæc Recentiorum præsertim scholis accommodata esse existimavi. Ex iis partibus, quæ tum in illa, tum

in aliis

Digitized by Google

in aliis cum ea affinibus facultatibus necessariæ prædicari solent, simplex, & unum sibi ubique simile systema conflare conatus est eorum Auctor, expurgatum ab iis omnibus, quæ extranea, & auditorum jucunditati servire melius, quam usui Matheseos in Philosophiâ videbantur; naturalem *ordinem in iis sectatus est constantissime, quin tamen rigor ille demonstrandi, qui totus Mathematicæ proprius est, minimum acceperit detrimentum, quod quidem quam difficile, & asperum factu sit, ii solum agnovêre, qui labori hujusmodi manus admoverunt; qua ex methodo perspicuitatis ubique memor, atque sollicitus, tantam brevitatem consequutus est, ut intra biennium absolvi cum ipsa Philosophia posse commodissime facto ipso comprobaverit; ut omnia paucis complectar, eorum usum, atque necessitatem in philosophia in jis elucubrandis unicè respexit. Inde factum est, ut ea multi non Philosophiæ modo, sed aljis etiam disciplinis addicti ab ipso, & ab ejus auditoribus*

ribus

ribus rescribenda conquisiverint. Iamvero quis ignorat illud plerumque usuvenire, & in re præsertim Mathematica, ut si ad auctoris manus sua scripta redeant, in jis ne se ipsum quidem agnoscat, vel quod Adolescentium alii non satis pulchrè literas pingant, vel quod alji non satis prompte, quæ dictantur, excipiant, vel quod alii non satis attenti, vel quod denique plerique politam latine scribendi artem non satis calleant. Nactus sum ex his spem, plurimis optatissimam me rem esse facturum, si ipsa ederem. Inter ea, quæ me moverunt, graviora tibi aperui: minimè vereor ne ea repræhendas, imo mihi audeo polliceri fore, ut potius laudes; scilicet haud obscurè ostendunt, quantum studiosæ iuventutis progressui, atque commoditati studeam.

INDEX

Digitized by Google

INDEX.

Digitized by Google

Digitized by Google

PROLEGOMENA.

MATHESIS quantitatem, ſeu magnitudinem in genere contemplatur. Variæ hujus determinationes ipſam reddunt Objectum diverſarum illius partium. Quantitas ſub ratione numeri ſpectata objectum eſt *Arithmeticæ*, ſub ratione extenſionis objectum *Geometriæ*. Utramque tradituri Prolegomena hæc inſtituimus, in quibus nonnulla partim ex vulgari notione, partim ex Ontologia petita præmittenda videntur.

Utut eorum multa à pleriſque negligantur, quippequæ vel apud vulgus notiſſima ſunt, vel ſine demonſtratione aſſumuntur, quia vel indemonſtrabilia cenſentur, vel alibi, *v. g.* in Ontologia jam demonſtrata ſupponuntur; quia tamen mens nobis eſt, elementa utriuſque methodo ſcientifica ab omni (ſi per noſtras vires tenuiſſimas illas quidem licuerit) notionum confuſione, qua vulgares omnes laborant, expedita, atque ita ex integro pertractare, ut ipſa evoluentes facultates alias ad ea plenè intelligenda conſulere non cogantur, in his Prolegomenis proſequemur. Certè conſilium hoc improbum non videbitur, cum non poſſit

Logica rectificatas ideas commendare iis, quibus tuto pede in ſcientiis incedere mens eſt, quin ſimul inſinuet confuſas labilem inceſſum reddere, atque periculoſum. Atque hìc quidem appoſitè in mentem veniunt non pauci, leves ji quidem Geometrarum ipſorum in ipſis axiomatis lapſus, non ab alia certe cauſa, quam vel ex neglectu rerum ſimplicium, vel ex notionum confuſione profecti, cujuſmodi eſt, quem in Clavio depræhendit Tacquetus circa extenſa congruentia, & longè graviores Phyſicorum in applicatione Matheſeos ad res phyſicas, quæ probabilitates Phyſicæ tantùm proprias ipſi Matheſi communes reddidiſſe Cl. D. Mairano videtur. Si enim Wolfium audiamus, ea applicatio periculi plena eſt, ob eam dumtaxat cauſam, quod probe non diſtinguatutr, quid realis, quid imaginarii involvant notiones Mathematicorum. Ergo nobis Matheſeos ſtudium cum Philoſphia coniuncturis cordi cum ſit cautè in utraque incedere, tum vulgares, tum Ontologiæ notiones diſtinctè explicandæ ſunt, non in confuſa earum notitia aquieſcendum; preſertim cum hac in re facem præferat Wolfius ipſe, qui non ſolum corpori matheſeos multa, quæ ab ipſo in Ontologia fusè traduntur, inſeruit, ſed ipſi in Diſcurſu Præliminari nonnulla ad Logicam ſpectantia præmittere non dubitavit, ut matheſeos in genere ordinem ob oculos poneret; de hoc & nos hìc pauca dicemus, antequam notionum generalium explicationem adgrediamur.

Si teſte Proclo ex matheſi in cæteras facultates ordo proficiſcitur, certè juxta vetus illud Ariſto-

telico-

telicorum effatum, *propter quod unum quodque tale, & illud magis*, admirabilis plane in ipsa ordo habeatur, oportet. Ordo in genere ex Ontologia nihil est aliud, quàm similitudo in coexistendo, & succedendo, quæ ex eadem Ontologia non aliunde pendet, quàm ex uniformitate regularum, secundum quas coexistentia, vel successiva disponuntur. Quæ quidem ordinis definitio mirum, quàm recte dispositioni rerum in Mathesi accommodetur. Sive enim demonstrationes respicias, principia certitudinis nec plura, nec pauciora, quam quæ in iis sufficiant, juxta ratiocinandi regulas ita afferuntur, ut assensum invictè semper eliciant, si sint directæ; errorem in positione contraria manifestissimè detegant, si sint indirectæ: quamobrem factum est, ut tota matheseos propria laus sit, eam antiquissimis scientiis coævam eadem immutabiliter dogmata conservasse: Sive propositionum subordinatio consideretur, ea à genio mentis humanæ à natura ita comparatæ, ut a facilioribus, atque simplicioribus ad difficiliora, & complexa magis sua veluti sponte ascendat, tamquam ab inviolabili lege dependet. Hinc *Definitiones*, seu explicationes nominum, quibus utitur, seu notiones rerum, de quibus agit, *Axiomata*, seu Propositiones indemonstrabiles aliquid esse affirmantes, *Postulata*, seu propositiones indemonstrabiles aliquid fieri postulantes, demonstrabilibus, aut ponentibus aliquid esse, nempe *Theorematis*, aut aliquid fieri postulantibus, nimirum *Problematis* (ut ut vox *problema* extra Mathesim in alio sensu sumatur) præmittuntur. Hinc idemtidem paragraphi *Scholiorum*

rum nomine insigniti intersseruntur ad solvenda dubia, ad tollendas obscuritates, ad indicandos doctrinarum usus, fontes, inventores, aliaque hujusmodi, quæ vel animos excitent, atque admiratione capiant (quod non parum confert, uti docet Psychologia, ad mentis progressus) vel planiorem ante ipsam mentem sternant viam. Hic quidem opportunè advertendum in his elementis axiomatum, & postulatorum ne mentionem quidem factum iri. Is enim ego sum, qui inter axiomata, seu inter propositiones indemonstrabiles solas propositiones perfectè identicas recenseo, veluti *idem cum semet est idem: impossibile est idem simul esse, & non esse: quod est, est* aliaque hujusmodi; quæ verò ab aliis axiomatum nomine insigniuntur, videntur mihi primæ quædam illationes ex notionibus simplicibus, in quibus rebus tribuuntur eæ primæ notæ, quæ in earum notione primo intuitu distinctè perspiciuntur. At si ita se res habet, decentiorem habent locum, ubi notiones ipsæ traduntur inter earum corollaria. Quod quidem non ab aliis factum existimo, quia plerumque axiomata proponuntur ex notionibus pendentia, quas turpiter omittunt. Sive demum capitum distributio spectetur, sarctam tectam hanc legem ea observat, ut præcedant, quæ rationem sufficientem continent, ne ulla umquam propositio demonstrabilis principii locum teneat in demonstratione, quæ tamen antea demonstrata jam non fuerit.

Cui legi tam strictæ profecto adhærent Geometræ, ut si contigerit aliqua in demonstratione opus esse

esse principio aliquo, quod nec in præcedentibus capitibus locum habuerit, nec ad materiam ejus capitis, in quo eo opus est, pertinuerit, filum abrumpant, ipsumque sub *Lemmatis* titulo demonstrent.

In quo quidem ordine tam admirabili, vix quidquam desiderari posse videtur; si eorum, quæ spectant ad distinctas rerum species, ad distincta capita reductionem excipias. Certè ea Geometrarum animos etiam nunc sollicitos tenet; cum præsertim in memoriæ gratiam ab omnibus scientiis illud expostulet Psychologia, ut in distinctas classes specificas distinctarum rerum species distribuantur. Quamobrem ægrè ferunt eodem in libro Rectas cum Triangulis, Quadrilateris &c. permisceri. Defectum hunc aliqua ex parte imminuit Wolfius, sed eum à Geometria penitus profligare illæso ejusdem rigore demonstrandi, impossibile duxit. Cum enim multa *e. g* de Lineis rectis, demonstrentur Triangulorum ope, de Triangulis ope Parallelogrammorum &c., eam ob rem necessariò fit, ut accuratæ demonstrationis solliciti, à Triangulis ad rectas, hinc rursus ad Triangula, ex his ad Parallelogramma, inde iterum ad Triangula &c. digredi teneantur. Adeo ab ordine in varietate, in quo perfectionem ponit Wolfius, trahor, ut impetrare à me ipso non possim, ut ab ordine naturali discedam (licet difficultas mihi in re Mathematica penitus novitio desperationem quamdam indicat;) interim idem perfectionis amor etiam hoc in ordine Geometricæ, hoc est accuratæ demonsttationis efficit studiosissimum. Sed satis jam

Digitized by Google

de ordine matheseos tum in genere, tum de eo, cui adhærebimus. Veniam igitur ad notiones generales, quas cum Wolfio systemati non inserui, quia visæ non sunt citra naturalis ordinis læsionem in ipso decentem locum habere, exordium ab his desumens, quæ in Arithmetica præcipuè usum habent.

1. Arithmetica, quam meritò dixeris Mathesim universalem, est scientia, quæ circa numerorum naturam, proprietates, & relationes versatur. Nulla matheseos pars doctrina relationum quantitatum, quæ non nisi per numeros, ut patebit inferius, determinari potest, non indiget; proindeque illa meritò cæteris partibus præmittitur. Ex hoc intelligitur etiam, cur Plato homines à natura ad numerandum bene dispositos ad reliquas omnes, nedum Mathematicas, disciplinas idoneos prædicet. Pars ejus Theoretica in contemplatione veritatum ad numeros pertinentium immoratur; Practica verò in quibusdam operationibus datos numeros ità immutantibus, seu modificantibus, ut datas relationes obtineant. Practica vulgaris circa numeros determinatos, circa indeterminatos Practica speciosa versatur.

2. Ut singularum hujusmodi partium objecta rectè assequamini, ad sequentia attendatis oportet. Duo quælibet entia respectu eorum, quibus salvis substitui sibi possunt, *eadem* dicuntur, *diversa* respectu cæterorum: dignoscitur autem, an aliquid post substitutionem saluum maneat, si ea vel actu facta, vel supposita in ordine ad ipsum perinde sit, ac si nulla facta fuerit substitutio. Sic si una libra plum-

plumbi, uni libræ argenti ſubſtituatur in ordine ad pondus perinde eſt, ac ſi ſubſtitutio facta non eſſet, ſed non in ordine ad valorem; unde illud quidem, ſed non hic ſaluus manet; & hæ duæ metallorum portiones *eædem* dicuntur in pondere, *diverſæ* in ordine ad pretium. Quod ſi hæc ſubſtitutio ſalvis omnibus fieri poſſit, identitas habebitur maxima, & perfecta, ſecundùm quam ſubſtituibilia non amplius eadem, ſed *idemmet* in ſingulari dicuntur; quia tali pacto ſubſtituibilia non duo quidem ſunt, ſed unum per fictionem quamdam conceptum ad modum duorum; Si nimirum ens A habeat prædicata B, & C, & prædicata hujuſmodi ſimul concipiantur ad modum perfectionis, cui ſalvis omnibus ſubſtitui poſſit A, hujuſmodi perfectio, & ens A dicuntur idemmet; ſed hujuſmodi perfectio, quam complent prædicata omnia entis A, eſt ipſum Ens A, adeoque ipſa, & Ens A ſunt unum conceptum ad inſtar duorum, nec Ens aliud ullum D poteſt eadem prædicata ſibi vindicare, quin cum A ſit unum, & idem. *V. gr.* ſi fuerit ſeries quælibet globorum: A, B, C, D &c. C habebit hæc prædicata, quod ſit globus, quod pertineat ad hanc individuam determinatam ſeriem, quod talem dicat ad cæteros ordinem, quæ quidem omnia ſimul concepta nihil aliud ſunt, quam ipſe globus C, & nec in ſerie, nec extra ſeriem, quidquam poteris concipere, cui illa ſimul omnia prædicata conveniant, niſi ſit unum & idem cum globo C. Qua quidem in doctrina duo veniunt conſideranda, identificatio prædicatorum omnium entis A cum ipſo (indiviſio inſe juxta Thomiſtas) & talis

eorumdem appropriatio, ut ipſa alteri non poſſit communicare (diviſio à quocumque alio).

3. Ex his, quæ de unitate ediſſerunt Metaphyſici, lucem deſſumit ſenſus, quem eidem tribuunt Arithmetici: apud ipſos nimirum A dicitur *unum* reſpectu B ſecundùm aliqua prædicata, quæ cum B habet communia, dummodo ſit indiviſum in ſe, & diviſum a quocumque alio, ab ipſo etiam B, quocum aliqua prædicata communicat. *v. gr.* globus ligneus relatè ad plumbeum dicitur unum, & contra in ordine ad prædicatum ſphæricitatis, in quo conveniunt, non in ordine ad materiam, ita ut efficiant duas globorum unitates, ſeu duos globos, ſed non duos globos ligneos. Iſta porro convenientia in aliquo prædicato, juxta quam res una relatè ad alteram dici poteſt una, illud eſt, ex quo res ipſæ *homogeneæ* dicuntur. Sic quia palmus relate ad horam dici non poteſt unum, palmus, vel quælibet alia extenſio ipſi horæ, vel cuilibet alii tempori homogeneus non eſt, ſed heterogeneus, (quæ enim homogenea non ſunt *heterogenea* vocantur). Res, quæ nulli entium generi homogenea eſſe poteſt, *unica* dicitur abſolutè quidem, ſi ſecundùm quodlibet prædicatum nulli homogenea eſſe poſſit; reſpectivè verò, ſi ſecundùm aliquod prædicatum ſolum alteri homogenea eſſe non poſſit; Sic Deus abſolute unicus eſt, quia in ipſo prædicatum non datur ullum, ſecundum quod cum altera qualibet re convenire poſſit; contra verò in Triangulo rectangulo angulus rectus unicus eſt reſpectivè, hoc eſt, non quia angulus non detur, relatè ad quem ipſe dici poſſit unus, ſed quia non datur

datur angulus hujuſmodi in eodem rectangulo triangulo, unicus ſcilicet dicitur in ordine ad prædicatum hoc, quod ad Triangulum rectangulum pertineat.

4. Porro unitas, una, alia, atque alia, iterum alia, rurſus alia, adhuc alia &c. ſimul eficiunt *multitudinem*, quæ pro diverſis teſpectibus *magnitudo*, *quantitas*, *numerus*, *totum* vocatur. Si unitates in multitudine ut homogeneæ non ſpectantur, ipſa conuenientius dicitur totum, & unitates dicuntur *partes*, ſecus dicitur aut multitudo, ſeu numerus, aut magnitudo ſeu quantitas; multitudo quidem, ſi ipſæ unitates determinatæ ſint, magnitudo, ſi indeterminatæ. Index, axiculi, rotæ, pendulum, lamella partes ſunt ſimul horologium unum conſtituentes; ſed quoniam earum quælibet una quidem in ſe eſt, ſed non una relatê ad aliam, horologium dicitur potius totum ex his partibus compoſitum: contra verò dentes in rota qualibet multitudo, & numerus ſunt, quia eorum quilibet relate ad alterum dici poteſt unus; Tempus denique, quod ipſum horologium dimetitur, magnitudo, ſeu quantitas dicitur, quamdiu non determinantur partes, ſeu unitates, horæ, minuta &c. quæ ipſum numerent. Quantitas, & numerus ſuper rationem totius addunt homegeneitatem in partibus, qua præciſa, quantitas, et numerus in totum evadunt.

Partium, ex quibus extat totum, quælibet in ſe quidem una eſt, ſed in toto conſideratæ omnes unum ſunt, quamobrem totum, quantitas, multitudo quælibet pro unitate etiam aſſumi poteſt. Hinc Mathematici unitatem quamlibet in alias dividunt,

dunt, atque ſubdividunt, eam non ad inſtar veræ, & in ſe indiviſæ unitatis reſpicientes, ſed ad inſtar totius, numeri, vel magnitudinis. Sic in numeris fractis unitas ſupponitur diviſa, ſed eo ipſo unitas jam amplius non eſt, ſed numerus, (idem ſcilicet cum denominatore fractionis) ut in ſyſtemate apparebit.

Vnitas ergo in ſenſu quidem proprio prima eſt, atque indiviſibilis quantitatis pars, eaque conſtans, & quantitatis expers (*num.* 3.) ſed unitas Mathematicorum eſt totum quodlibet, quælibet magnitudo, quilibet numerus, atque in magnitudine qualibet quantacumque ejus pars pro unitate eam menſurante determinari poteſt. Quamdiu nondum ullam in toto partem pro unitate determinatam, ſed quamcumque partem pro unitate determinabilem reſpicis, ipſum ad unitatem indeterminatam refers.

Cæterum ſive determinatæ ſint, ſive indeterminatæ, quæ numerum, vel magnitudinem efficiunt, unitates, ſemper, ut ipſæ ſimul quantitas ſint, ut homogeneæ ſpectari debent, &, ſi in iis ſola quantitas attenditur, in ipſa debent identificari. Sic in numero pedum Venetorum tuum non eſt pedem referre nunc ad Pariſinum, nunc ad Romanum, ſed ſingulæ unitates debent convenire in quantitate pedis Veneti.

Aliquando tamen unitates pro data quæſtione ſunt indiviſibiles, attamen quantitatem habent, & quidem diverſam, *v. g.* in exercitu milites unitates ſunt indiviſibiles, ſed ſuam ipſi habent altitudinem; nec omnes eandem; ſed tum attenditur

Digitized by Google

ditur solum esse specificum militis, quod simplex est, in ordine ad quod unus cum altero quantitate convenire propriè dici non potest, aut differre,

Unitatum multitudo, seu numerus à quo rei quantitas pendet, pro unitatum diversitate in eadem quantitate diversus est. Sic, si unitas eandem altitudinem numerans sit decempeda, multitudo unitatum in ea altitudine diversa est, ac si unitas sit pes. Sed unitate determinata ipsa quoque determinatur multitudo, & quantitas inde ipsa. Et cum ens intelligi nequeat, nisi omnes ejus determinationes agnoscantur, etiam quantitas nonnisi per unitatem, ad quam refertur, intelligitur.

Quantitatem, seu magnitudinem in genere definit Wolfius per id, quod non intelligitur, nisi per relationem ad unitatem; & sensui quidem nostro conformiter, in quo notionem quantitatis à notione multitudinis, & notionem multitudinis à notione unitatis repetimus. Quantitas alia permanens est, alia successiva: permanens, cujus partes simul existunt, successiva, cujus partes successivè existunt. Parte una temporis desinente alia incipit, adeoque ipsum quantitas est successiva; sed parte una spatij existente alia quælibet coexistit, adeoque ipsius quantitas est permanens. Utraque dividitur in continuam, & discretam. Continua ea est, inter cujus partes nihil interponi potest; inter cujus partes aliquid interponi potest, discreta. Spatij partes ita coexistunt, ita sibi succeduut partes temporis, ut inter ipsas nihil interjici

rjici poſſit, proinde quantitates continuæ ſunt: Stellæ omnes, ex quibus ſtellarum multitudo componitur, ita diſpoſitæ ſunt, ut inter ipſas aliquid poſſit locari; multitudo proinde hujuſmodi quantitas eſt diſcreta. Omne, quod in re qualibet ineſt, id vel quantitas eſt, vel qualitas. Cum ergo quantitas ſit multitudo unitatum determinatarum, aut indeterminatarum, qualitas erit id omne, quod ineſt in ente, nec eſt multitudo unitatum determinatarum, aut indeterminatarum; quæ propterea meritò à Wolfio definitur per id, quod intelligi poteſt ſine relatione ad unitatem.

5. Nihilum pluribus modis definiri ſolet à Metaphyſicis; Wolfio eſt id, cui nulla reſpondet notio, Erhardo Weigelio, id quod cogitamus, cum plane non cogitamus, aliis id, quod relinquitur re ſublata, aliis id, quod eſt impoſſibile, ſeu quod contradictionem involvit. Hi omnes ſenſus ſunt nihili abſoluti, ſeu nihili entis in genere. Nihilum dati entis poſſet definiri per id, cui nullo conveniunt modo, quæ ad dati entis notionem pertinent; Sic qui nihil poſſidet pecuniæ, nullum patitur ſibi tribui prædicatum eorum, quæ pecuniam poſſidenti conveniunt, abnuit eleemoſinam petentibus, ad tabernam invitantibus &c. Nihilum quantitatis illud eſt potiſſimum, de quo loquuntur quandoque Mathematici, & merito definiri poſſet per id, cui quantitatis notio, & prædicata nullo modo conveniunt. Sed juverit ad ſtatum nihili ex quantitatis notione deſcendere. Quantitas ex unitatibus coaleſcit, atque hæ à Mathematicis ex aliis

unita-

unitatibus adhuc coaleſcentes conſiderantur, iterum iſtæ ex alijs in infinitum (*ex num.* 4.) ſed vera unitas ex aliis non coaleſcit (*ex num. cit.*) ipſa quantitas non eſt, ſed primum quantitatis principium. Quod, ſi quemadmodum quantitatem ſucceſſivè unitate mulctantes ad unitatem deſcendimus, ita ex ipſa deſcenſum hujuſmodi proſequamur, ſtatim ac unitatem hanc ultimam removeris, ad ſtatum nihili tibi ventum eſt. Ulterius ſi unitates removere pergas, ſtatus reſpondens huic unitatum remotioni à nihilo deficiet per numerum unitatum ablatarum. Hujuſmodi defectus quantitatum verarum à nihilo dicuntur quantitates *negativæ*, *privativæ*, *abſurdæ*. Abſurdæ quidem merito dicuntur quantitates negativæ, oriuntur enim, & coaleſcunt ex unitatibus a nihilo, ex quo quidquam demere repugnat, demptis. Sed ea fictio, juxta quam ad modum quantitatum conſiderantur, veri vicaria eſt.

A

P . . . . . . ———— Q. Pergat Viator ex A in Q, nihil itineris ipſe perfecit, quamdiu manet in A; ſed primo verſus A paſſu progreſſus iter incepit, quod tanto majus evadit, quantò pluribus verſus Q paſſibus promovetur, quantòque minor eſt diſtantia inter ipſum, & terminum Q, iter ſcilicet creſcit decreſente ejus diſtantia a termino Q, decreſcit eadem creſcente. Quod ſi ergo ex A regrediatur in P, minus itineris perfeciſſe dicetur, quam ubi manebat in A; ſed in A nihil perfecerat itineris; igitur in P minus nihilo ejus iter erit reputandum. Quantitas AP hoc in caſu negativa eſt, non quia prodeat ipſa paſ

ſibu

sibus ex nihilo sublatis, quod utique absurdum est, sed quia in hypothesi, quod terminus itineris sit in Q, & initium in A, ex nihilo subtrahi quodammodo videntur. Revera, si terminus stabiliatur in P eadem numero AP evadet positiva, & AQ negativa quantitas. Quatenus ex nihilo subtrahi fingitur quantitas negatiua, nullum omittere debet eorum respectuum, quos habet, dum ut positiva consideratur, nec immutat quidpiam in ipsa ea fictio; ut si positiva sit æqualis alteri positivæ, negativa etiam alteri eidem negativæ æquari debet. Revera enim quantitas quæcumque semper cum se ipsa eadem est, qualiscumque tandem sit ejus consideratio. Recta AQ semper est recta AQ sive terminus itineris sit in Q, in quo casu est positiva, sive sit in P, in quo casu est negativa. Centum aurei sunt semper centum aurei, sive considerentur ut ab Titio solvendi, cujus respectu erunt quantitas negativa, sive ut Sempronio reddendi, cujus respectu erunt quantitas positiva. Nihilum ergo est quoddam veluti medium inter affirmativas, & negativas quantitates.

6. Si res unitate designata sit ens in genere, multitudo hujusmodi unitatum nullam rerum determinatam speciem numerabit, sed ad numerandam quamlibet erit determinabilis, sicuti unitates ipsæ. Porro quantitas illius est speciei, ad quam referuntur unitates eam componentes, positiva si illæ positivæ, negativa si negativæ, continua, si continuæ, discreta si discretæ &c. (*num.* 4. & 5.) unde dicta multitudo ad quantitatem quamlibet numerandam erit applicabilis, si ejus unitatibus ens

bus ens in genere designantibus eæ adjiciantur determinationes, quas habet ipsa quantitas. Ex homogeneitate autem, quam inter se unitates habere debent (*num.* 3:) statim illud sequitur, hujusmodi multitudinis unitates adhiberi non posse ad numerandas diversas quantitatis partes, ita ut una applicetur exprimendæ parti centesimæ, alia adhibeatur ad exprimendam partem decimam: Alias enim in ipsa non solo numero, sed specie ipsa differrent. Hinc in determinationibus quantitatis recensebitur species entis, ad quam ipsa spectat, qualitas partis, ad quam numerandam generica unitas applicari intelligitur, & multitudo unitatum genericarum quantitatis partes omnes numerans. Hæc si in quantitatibus eadem fuerint, quantitates ipsæ eædem erunt, si diversa, diversæ. Quod si quantitates fuerint eædem, hæc eadem in ipsis pariter erunt, si diversæ, aut omnia, aut eorum aliqua diversa erunt. Sic centum aurei, & bis quinquaginta aurei, & in specie aureorum, & in parte pro unitate sumpta, & in multitudine hujusmodi unitatum conveniunt, adeoque sunt eædem pecuniæ quantitates; sed cum hæc eadem non sit in centum aureis, & quingentis denariis, hæ erunt diversæ pecuniæ quantitates, & contra quia hæ postremæ sunt diversæ pecuniæ quantitates, in dictis determinationibus non conveniunt.

In duabus autem quantitatibus in genere, seu quarum unitates ens in genere designant, prima conditio non requiritur ad identitatem ipsarum, quia ex ente in genere determinationes specificæ excluduntur. Quoniam porro in una eademque

rerum

Digitized by Google

rerum specie infinite diversæ quantitates habentur, tum pro diversa multitudine partium, quas habent tota ad eam speciem spectantia, tum pro diversitate ipsarum partium pro unitate spectabilium *v. g.* (In specie extensionis linearis infinitæ diversæ dantur lineæ diversas palmorum multitudines continentes, & una eademque linea diversa multitudo est unitatum pro diversitate mensurarum, quæ loco palmi pro unitate assumi possunt) multitudo generica, quæ non solum ad quantitates omnes numerandas, sed etiam ad numerandam eamdem modis omnibus apta esse debet, infinitè diversis modis unitatem genericam continet. Modi hujusmodi sunt nnmeri individui, de quibus in Systemate. Quantitatibus solo numero differentibus exprimendis illi individui numeri applicantur, qui unitatem in genere eodem modo continent, ac quantitates ipsæ unitates suas: &, si idem pro unitate sumatur in duabus quantitatibus, ipsæ eædem sunt, si eodem numero numerantur, diversæ, si diverso.

7. Habetis jam primitivas unitatis, multitudinis, magnitudinis, seu quantitatis, totius, partis, aliasque notiones, quas Arithmetica supponit. Ex his derivativæ nonnullæ ejusdem in Arithmetica necessitatis componuntur, ad quas priusquam deveniam, principia quædam ex dictis immediatè fluentia hìc recensebo, in quibus prima prædicata, quæ in ipsis notionibus distinctè elucescunt, subjectis definitis tribuemus.

a Quantitas quæcumque pro unitate assumi potest respectu alterius homogeneæ. Fluit immediate ex notione homogeneorum. Sic A, A, A

quæ

Digitized by Google

quæ ſolo numero differunt, in cæteris conveniunt, homogeneæ ſunt, & una relate ad alteram dici poteſt una, proinde quælibet pro unitate aſſumi poteſt relatè ad alteram, & ipſæ eodem modo numerari, quo numerantur unitates ſimplices, ita ut A, A, A efficiant 3 A, ſicuti 1, 1, 1 efficiunt 3. Revera in ipſo vulgari uſu numerari ſolent quantitates ad inſtar unitatum, quando ſunt homogeneæ, ut nos exigimus. Sic Aſſes Romæ numerus ſunt Teruntiorum, Oboli Genuæ numerus Denariorum, ipſi tamen numerantur ad inſtar unitatum; ſed obſervatur, ne dicantur unum, niſi reſpectu aſſium aſſes, obolorum oboli.

b Quantitati cuilibet præfixa intelligi debet unitas, ita ut A. & 1. A. ſint expreſſiones eædem; (*fluit ex a*)

c Si duæ quantitates poſitiva altera, altera negativa ex totidem unitatibus conſtent, quantum una ſuper nihilum adiicit, tantum ex eodem altera demit, adeoque perinde eſt, ac ſi nihil adiiciatur, nil dematur (*num.* 5.) & ipſæ efficiunt nihil.

d Quantitates negativæ homogeneæ ſunt ſecundùm eoſdem reſpectus, ſecundùm quos tales erant, quando erant poſitivæ. Patet ex *nnm.* 6.

8 Cum duas quantitates ſimul concipimus, & per ſubſtitutionem eorum, quæ ipſis inſunt, aut aliquid, aut nihil in ipſis immutari deprǽhendentes eaſdem eſſe, vel diverſas judicamus, eas inter ſe comparare, ſive ad ſe invicem referre dicimur: Relatio ſiquidem in genere omnis fit res in ſe prius, & ea, quæ in rebus inſunt, conſiderando, & de earum identitate, vel diverſitate judicando, quod

quidem judicium ſubſtitutionis examen ſupponit: Variæ identitatum, ac diverſitatum ſpecies conſtituunt varias ſpecies relationum, quarum una eſt identitas, aut diverſitas rerum ſecundùm quantitatem; & dicitur earundèm *Ratio*; prima quidem ratio *æqualitatis*, altera *inæqualitatis*. Adiicit cum Leibnitio Wolfius determinationem aliquam ipſi relationi, exigens ipſam talem, ut per eam quantitas una ex alia dignoſcatur; ſed id omnium omnino relationum proprium eſt, ut per eas ex iis, quæ inſunt in relatorum uno, intelligantur, quæ inſunt in altero. Statim ac enim duo in relatione eadem eſſe conſtat, ex prædicatis unius prædicata alterius innoteſcunt: ſtatim ac conſtat eſſe diverſa in relatione in genere, & innoteſcit modus diverſitatis in relatione in ſpecie, pariter ex prædicatis unius innoteſcunt prædicata alterius, ita ut relatio in genere poſſit etiam definiri per actum mentis rei uni prædicata tribuentis ex conſideratione rei alterius; ſimultanea quippe rerum conſideratio, de qua mentionem fecimus in ſuperiori definitione, imo & conſideratio rerum in ſe ad relationem non pertinent, ſed prærequiruntur. Sed in exemplis etiam videre poſſumus rationi quantitatum immeritò tribui ſupra relationes cæteras illud privilegium, ut unum relatorum in ea ex altero determinetur. ac intelligatur. Numerus bis ſex ſtatim agnoſcitur ex æqualitatis ratione, quam habet ad ipſum duodenarius, ex hujus prædicatis omnibus determinantur, & agnoſcuntur omnia prædicata illius. Per rationem inæqualitatis ex duodenario agnoſco prædicata generalia alterius numeri *v.g.* ea omnia, quæ habet

habet numerus in genere, tum diverſitatem in genere prædicatorum hujus numeri à prædicatis duodenarii, quatenus duodenarius eſt. Quod ſi hæc inæqualitatis ratio determinetur, & ſtabiliatur majoris, vel minoris, ratio huiuſmodi diverſa in genere etiam ſpecificabitur, *v. g.* ante determinationem hanc rationis ſolùm innoteſcebat in genere numerum hunc incognitum non eodem modo continere 1, 2, 3, &c. poſt ipſam verò illud etiam innoteſcet, continere pluries, vel paucioribus vicibus. Si denique ipſa inæqualitatis ratio tripla, quadrupla &c. ſubtripla, ſubquadrupla &c. ſit, illud etiam conſtabit, quot præciſe vicibus contineat unitatem, vel datum numerum, quinam numerus præcisè ſit. Sed nonne etiam hæc præſtant relationes ceteræ? Liceat hic afferre exemplum, quod adhibet ipſe Wolfius ad contrarium evincendum. *Talis eſt*, ait ipſe, *ſinus recti ad ſinum complementi in Trigonometria* (ſupple) *relatio*, quæ tamen in rationum numero non habetur, quippe per eam unum ex alio non determinatur, atque intelligitur. At, vel ſinus rectus comparatur cum ſinu complementi ſecundum modum, quo ad datum arcum refertur in ſua poſitione, & tum nonne ex hoc modo innoteſcit modus, quo ſinus complementi, ſeu coſinus tum ad arcus complementum, tum ad arcum ipſum refertur in ſua poſitione? Certe hæ poſitiones non ita procul a ſe invicem differunt, imo ad ſe ita prope accedunt, ut ſinus dicatur coſinus, & coſinus ſinus ſalva hac poſitione ad ſuos reſpectivos arcus. Quidni ergo poſitio unius ex poſitione alterius ſufficienter non intelligetur? Vel ſecundum quantitatem; & tum

Digitized by Google

tum ex Trigonometria uno dato alter invenietur; ex *Prob.* 1. *Trig. Wolf*: §. 16. Immerito ergo rationem a cæteris relationibus per hoc distinguit Wolfius, quod per eam terminus unus ex alio determinetur. Addit etiam sine homogeneo assumpto, sed nec homogeneum assumptum in cæteris relationibus est necessarium; siquidem eæ, æquè ac quantitatum ratio, qualitates sunt. Imo in ratione intelligenda tertium quidem homogeneum non est necessarium, sed ut per rationem quantitas una ex alia determinetur, necesse est, ut una detur, nec dari certe potest quantitas ulla sine relatione; ad homogeneum, at id non evenit in cæteris relationibus. Hinc ita mecum statuo rationem cum relationibus omnibus convenire in genere, ab iis non per aliud differre, nisi per hoc, quod relata in ipsa sint quantitates, in illis non item, & relationes ipsas omnes à relatis nomen desumere.

Ergo tutum de æqualitate judicium fertur, quando unitas in una quantitate est pars ejusmodi, ut substitui possit parti, qnæ est unitas in altera salva relatione, quam hæc habet ad totam quantitatem, & numerus idem exprimit unitates utriusque, seu, cum numerus exprimat modum, quo multitudo unitatem continet, si hujusmodi unitatem eodem modo continent, & vice versa si æquales sunt, eamdem unitatem eodem modo continent; si autem eamdem unitatem non continent eodem modo aut eodem modo continent diversas, inæquales sunt, & contra. Ut autem intelligatur, quid sit hujusmodi relatio partis ad totum, ex qua partes qualitatem dessumunt; ea nihil aliud est,

Digitized by Google

eſt, quam modus, quo in ipſo toto continetur. Si ita continetur, ut aliquoties ſumpta ipſum adæquet, vel aliquoties ex eo detracta ipſum annihilet, dicitur aliquota, & in ſpecie, ſecunda, tertia, quarta, &c. ſi numerus exponens ejus repetitionem ſit 2, 3, 4, &c. ſi ſecus, aliquanta. Partes aliquotæ dicuntur etiam in Arithmetica menſuræ. Igitur ſi fuerint quantitates A, & B, pars X, quæ eſt unitas in B, ſubſtitui poteſt parti Z, quæ eſt unitas in A, ſi, facta ſubſtitutione ipſius X in locum Z, ſalvus manet modus, quo Z continetur in A.

Porro inæqualitatis ratio in duas dividitur ſpecies; inæqualium enim unum totum alterius parti neceſſariò æquale eſt, & eorum primum dicitur *minus*, alterum *majus*, ratio verò illius ad hoc dicitur *minoris inæqualitatis*, & ratio ſecundi ad primum dicitur *majoris inæqualitatis*. De majori, & minori judicium qua ratione ferendum ſit, ex dictis liquet ſatis, ſi nimìrum ex duobus unum unitatem eandem pluries continet, quam alterum, aut ſi numerus exponens unitatis ejuſdem repetitionem in uno major fuerit, quàm in altero, illud quoque hoc majus erit, & contra. Conſultum eſt quandoque quantitatum ipſarum unam totam pro unitate aſſumere. Signum æqualitatis eſt $=$, majoris inæqualitatis $>$, minoris inæqualitatis $<$; ita ut $a = b$, $a > c$, $a < d$ ſignificet quantitatem a ipſi b æqualem, majorem ipſa c, & minorem ipſa d. Quodſi ad expoſitam rationum naturam animum bene advertas, illud facile agnoſces, eas omnes pendere a modo, quo quantitates continent unitatem eamdem, ſeu, ſi earum una pro

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

Digitized by Google

unitate sumatur (*num.* 4.) à modo, quo earum alterutra aliam continet. Heterogenea, quæ (*num.* 3.) ad unitates specie diversas referuntur, unitatem eandem propriè, nec eodem modo, nec diverso continent, ac proinde nec æqualia dici possunt, nec inæqualia, seu nullum rationis genus ad se invicem dicere, contrario verò modo se res habet in homogeneis.

Privativæ quantitates iis positivis, quarum sunt defectus, heterogeneæ sunt, nullum enim dari potest prædicatum, in quo unitas relata ad ens conveniat cum ea, quæ ad non ens refertur; hinc nec æquales, nec inæquales dici debent. Sed privativæ duæ inter se homogeneæ sunt, quando positivæ, quarum ipsæ defectus exprimunt, homogeneæ sunt. Prædicata enim utriusque sunt negationes eorundem prædicatorum in positivis; atque hinc inter se rationem dicunt; imo fieri potest, ut ratio duarum sit eadem cum ratione duarum aliarum, si respectivæ positivæ eamdem rationem dicant. De ratione redibit sermo in systemate. Identitas duorum secundùm qualitates dicitur *similitudo*, ejusque signum est ∽, diversitas *dissimilitudo*. Leibnitius similia appellat, quæ non distinguuntur, nisi per compræsentiam; verè quidem; compræsentia enim, aut immediata in similibus, & æqualibus, aut mediata, &, ut ita dicam, mentalis, in inæqualibus discernendis est necessaria. Sed negativum hoc prædicatum est similium attributum, non essentia; quapropter ab hujusmodi definitione meritò cum Wolfio (§. 24. *Ar.*) discedimus. Ex his omnibus fluunt sua sponte sequentia universalia principia.

Cum

e Cum idem ſalvis omnibus, adeoque ſalva & ipſa quantitate ſibi ſubſtitui poſſit, idem ſibimet æquale eſt. Duæ autem quantitates vel ſibi ſubſtitui poſſunt invicem, vel non; ergo vel ſunt æquales, vel inæquales. Eadem ratione evincam idem ſimile eſſe ſibimet, & duorum quorumlibet alterum alteri vel ſimile eſſe, vel diſſimile.

f Si duæ quantitates A, & B ſint æquales eidem tertiæ C, loco C ſubſtitui poteſt B ſalva quantitate; Sed A ſalva quantitate poterat ſubſtitui ipſi C (*hyp.*) ergo etiam ſubſtitui poterit ipſi B ſalva quantitate, adeoque A, & B æqualia eidem tertio C æquantur inter ſe. Similiter ſi A, & B æquantur æqualibus C, & D, erunt etiam æqualia inter ſe. Nam (*hyp.*) A = C ſed (*hyp.*) C = D ergo A = D (1. *part. num. hujus*) ſed pariter (*hyp.*) B = D ergo (1. *part. num. hu.*, A = B. Simili prorſus modo evincam ſimilia eidem tertio, imo & ſimilia ſimilibus inter ſe ſimilia eſſe. Nemo etiam libenter non tribuet, ut æqualia inter ſe cum aliquo tertio, vel aliquibus æqualibus, aut ſimilibus æqualia eſſe, aut ſimilia aſſumamus; ex quo enim duo in quantitate, vel qualitatibus identificentur, non excluditur tertium, ſaltem poſſibile ejuſdem quantitatis, vel qualitatum earumdem.

g Si æqualium unum ab alio ſemel auferatur, ſtatim evaneſcit tota hujus quantitas, adeoque remanet nihilum, (*num.* 4.) ex quo iterum auferri non poteſt. Igitur æqualium unum alterum non niſi ſemel continet; & vice verſa, ſi quantitas una alteram ſemel continet tantùm, alterutra ex alia detracta ſtatim nihilum remanet, quod indicio eſt unam

Digitized by Google

unitate sun
terutra alia
ad unitate
eandem p
continent
nec inæqu
vicem dic
in homog
Privat
defectus, h
teſt prædic
veniat cun
æquales,
duæ inter
quarum i
Prædicat
de in p
ſe rat
dua
ſi r
De
du
e
I

atq
&
ſimp
ſimp
quantit
m. 8.
ex m
differenti
m. 1.
, u
non poſſi
unius æque
alteriu
ideò ma
quam A
$C > A$
, ergo C
$C < A$
compoſitum ex
V. Igitur tota
V (ax 8.) ; ergo
totum eſt
libet ſuo toto
loco A ſubſtitui
facit $C = D$, &
$A >$

> C, erit etiam B > D; nam A > C (*hyp.*) ...d C = D (*hyp.*) ergo A > D (1.*p. num. hujus*) ...ed A = B (*hyp.*) ergo (*m*) B > D: eadem ...atione, si unum æqualium minus sit eodem tertio, ...odem minus esse alterum evincetur, & si æqualium unum uno æqualium minus sit, alterum altero ...esse etiam minus.

p Quodsi A sit majus B, & B adhuc majus C, pars ipsius A, quæ æquatur toti B (*n.* 8.), erit major toto C (*o*) adeoque à fortiori totum A majus erit, quam C, & (*l*) etiam C multo minus dici debebit ipso A, scilicet quod minore minus est, adhuc multo minus erit majore, uti quod majore majus est, minore adhuc est majus.

... Quantitas statim ac suscipit mutationem, fit div... ea, quæ erat antea; diversitas autem q... n est earumdem inæqualitas (*num.* 8.) ...lium unum necessariò majus, aliud (*l*) quantitas ergo non mutatur, ...major, vel minor evadat, nisi incre... suscipiat, aut decrementum, seu ut ...mmuni utar, nisi suscipiat magis, &

...que hæ quidem sunt eæ notiones, quarum ...ationem adeo sub initium commendavimus, ... usum ex ipsis principiis jam per eas ostensis ...cere potestis, longe plenius cogituri, & in ...si tota, & frequentissimè in ipsa etiam Phi... ex qua vos ad hæc prolegomena sæpe ... Ne miremini, si terminis sæpe usus ...logicis; ideo enim eos adhibui, qui... mihi

unam nihil aliud præter aliam continere, adeoque ipſas æquales eſſe.

h Idem æquale eſt ſibimet (*e*) ergo ſe ipſum nonniſi ſemel continet [*g*]

i Partes totum componentes ſimul ſumptæ ſunt ipſum totum (*num.* 4.) unde ſimul ſumptæ cum toto identificantur, etiam ſecundum quantitatem; ſeu cum ipſo æquantur.

k Minus majoris parti æquale eſt (*num.* 8.) unde majus eſt veluti totum compoſitum ex minori, & alia adhuc parte, quæ dicitur *differentia*, & cum totum partes omnes ſimul contineat (*num.* 1.) majus continet minus, & differentiam.

l Inæqualia ita ſunt inter ſe comparata, ut unum totum toti alteri æqnale eſſe non poſſit (*num.* 8.); remanet ergo, ut aut pars unius æquetur alteri toti, aut totum unum æquetur alterius parti: nimirum inæqualium unum neceſſariò majus eſt, alterum minus [*num.* 8.]

m Si A ſit æquale B, & C ſit majus quam A, erit etiam majus quam B. Nam (*hyp.*) C > A. Sed (*num.* 8.) loco A ſubſtitui poteſt B, ergo C > B. Simili modo oſtenditur, ſi ponatur C < A, fore etiam C < B.

n Sit totum quodcumque T compoſitum ex partibus X, & Z, ponatur X æqualis V. Igitur tota V = X parti totius; ſed T > V (*n.* 8.); ergo etiam eſt majus X (*m*) ſcilicet totum eſt majus qualibet ſua parte, & pars quælibet ſuo toto minor eſſe debet.

o Si A = B, & A > C, cum loco A ſubſtitui poſſit B, (*n.* 8.) erit etiam B > C; &, ſi fuerit C = D, &

A >

Digitized by Google

A > C, erit etiam B > D; nam A > C (*hyp.*) ſed C = D (*hyp.*) ergo A > D (1.*p.num. hujus*) ſed A = B (*hyp.*) ergo (*m*) B > D: eadem ratione, ſi unum æqualium minus ſit eodem tertio, eodem minus eſſe alterum evincetur, & ſi æqualium unum uno æqualium minus ſit, alterum altero eſſe etiam minus.

p Quodſi A ſit majus B, & B adhuc majus C, pars ipſius A, quæ æquatur toti B (*n.* 8.), erit major toto C (*o*) adeoque à fortiori totum A majus erit, quam C, & (*l*) etiam C multo minus dici debebit ipſo A, ſcilicet quod minore minus eſt, adhuc multo minus erit majore, uti quod majore majus eſt, minore adhuc eſt majus.

q Quantitas ſtatim ac ſuſcipit mutationem, fit diverſa ab ea, quæ erat antea; diverſitas autem quantitatum eſt earumdem inæqualitas (*num.* 8.) & inæqualium unum neceſſariò majus, aliud minus, (*l*) quantitas ergo non mutatur, niſi, ſi major, vel minor evadat, niſi incrementum ſuſcipiat, aut decrementum, ſeu ut phraſi communi utar, niſi ſcuſcipiat magis, & minus.

Atque hæ quidem ſunt eæ notiones, quarum rectificationem adeo ſub initium commendavimus, earum uſum ex ipſis principiis jam per eas oſtenſis agnoſcere poteſtis, longe plenius cognituri, & in matheſi tota, & frequentiſſimè in ipſa etiam Philoſophia; ex qua vos ad hæc prolegomena ſæpe provocabo. Ne miremini, ſi terminis ſæpe uſus ſum ontologicis; ideo enim eos adhibui, quia mihi res

mihi res est vobiscum qui utriusque facultatis studia coniungitis; imo ex hoc ipso lucem, quam Mathesi affundit Ontologia, recognoscite.

CAP. I.

DEFINITIONES

IN TOTA ARITHMETICA NECESSARIÆ

ARTICULUS I,

De Unitate, & Numero.

Definitio I. DEterminatio modi, quo quantitas quælibet unitatem continet, aut in unitate continetur, *Numerus* appellatur: Illud vero homogeneum, ad quod pro lubitu quantitatem ipsam referimus, dicitur *Unitas*.

Corollarium I. UNitas sive rigide sumpta, sive arbitraria, aut quantitatem non exprimit, aut id, quod exprimit, ut quantitas non consideratur (*num.* 4. *Prolcg.*) quamobrem numerus dici non potest (*Def.* I.) sed potius, cum exprimat id primum, quod supra nihilum ponit quantitas (*num.* 5. *Prol.*) principium numeri dici debet.

Scholion I. *EXcipies fortasse unitatem non esse principium eorum saltem numerorum, quibus determinatur modus, quo quantitas in unitate continetur, sed eorum potius finem. Verum eo in casu unitas ipsa ad instar numeri considera-*

ſideratur, & vel ipſe numerus unitate minor, vel aliqua ipſius pars ad inſtar unitatis (num 4. Prol.) *Hora* v. g. *quantitas eſt durationis, quæ reſpectu alterius temporis quantitatis æqualis una dicitur, ſed reſpectu duorum quadrantium, qui in ipſa continentur, unitas non eſt, ſed quadrantium numerus, cujus unitas eſt quadrans unus, medietas nempe temporis, quod duobus quadrantibus numeratur.*

Cor. 2. MOdus, quo quantitas unitatem, continet, pendet à vicibus, quibus unitas nihilo addenda, vel repetenda eſt, ut ipſa adæquetur (*num. 8. Prol.*) numerus ergo, qui modum hunc determinat, ipſas vices determinet neceſſe eſt.

Sch. 2. H*Inc numerus, ſicuti ex repetitione partis ſuæ pro unitate ſumpta reſultat quantitas, ex repetitione vicis unius prodire, veluti ex unitate utiliter fingitur, & quemadmodum in unitate arbitraria Mathematicorum aliæ adhuc partes, vel unitates contineri ſæpe fingimus, ita in una vice partes dari etiam fingemus, ita ut perinde ſit dicere quantitatem continere dimidiam, tertiam &c. unitatis partem, ac eamdem continere unitatem dimidia vice, vel tertia, quarta &c. parte unius vicis.*

Cor. 3. QUantitas augetur ex unitatum additione, numerus ex additione vicium, quæ ad ipſum, ut unitates, ſe habent [*Sch.2.*) ut igitur quantitas omnis augeri, atque imminui poteſt (*q. in Prol.*) ita & numerus quilibet.

Cum

Cor. 4. CUm in numero unitatum locum tueantur vices (*Sch.* 2.) quæ in ſe, nec diſcretionem, nec continuitatem, nec coexiſtentiam, nec ſucceſſionem dicunt, ſed communiter ad hæc omnia indifferentes habentur; numerus omni quantitatum generi exprimendo, & determinando idoneus eſt.

ARTICULUS II.

De Variis numerorum ſpeciebus.

Def. 2. NUmerus, in quo vices unitatum inſtar ſe habent, dicitur *numerans*, quantitas vero ipſa, cujus relatio ad unitatem exprimitur per numerum, dicitur numerus *numeratus*.

Sch. I. *NUmerans etiam definitur, per eum, cujus unitates nulli rerum generi exprimendo deſtinantur, & ad omnia rerum genera ſunt determinabiles; numeratus, qui contra, juxta ea, quæ innuimus* (num. 6. Proleg:) *ſed præſens noſtra definitio, & eamdem, quam prædicta, præſefert fæcunditatem, & interim ad communem loquendi uſum magis accedere uidetur. Numerando nimirum exploramus, quoties in numerata multitudine unitas repetatur, vel quot vicibus contineatur; & dimetiendo* (*metiri, & numerare in hoc tantum differunt, quod unitates ibi ſint continuæ, unitæ, hic ſecus, niſi metiri, ponamus in actu, quo unitas metiens menſurando applicatur*) *inquirimus, quoties unitas pro menſura aſſumpta menſurando applicari poſſit*

possit; *cum igitur illud* quoties *numero numerante in utroque casu exprimamus*, *liquet ejus unitates nos ad vices*, *non ad ens in genere communiter referre*.

Def. 3. EX *num. 6. Proleg.* numerus intrinsece determinatur ab unitate, & a modo, quo unitatem continet; unde numerus *determinatus* est, in quo unitas, & modus unitatem continendi determinantur; *indeterminatus*, in quo aut alterutrum, aut utrumque tamquam determinabile consideratur.

Def. 4. UNum cum uno appellantnr *duo*, duo cum uno dicuntur *tria*, tria cum uno *quatuor*, quatuor cum uno *quinque*, quinque cum uno *sex*, sex cum uno *septem*, septem cum uno *octo*, octo cum uno *novem*; & hi quidem numeri omnes dicuntur simplices, vel unitates, vel articuli primi ordinis, novem cum uno *decem* dicuntur, qui numerus compositorum primus est.

Def. 5. UBi ad denarium ventum est, semper reassumitur initium numerandi. Duæ decades efficiunt *viginti*, tres *triginta*, quatuor *quadraginta*, quinque *quinquaginta*, sex *sexaginta*, septem *septuaginta*, octo *octuaginta*, novem *nonaginta*; atque hi articuli secundi ordinis.

Def. 6. DEcas decadum dicitur *centum*, duæ dicuntur *ducenta*, tres *trecenta*, quatuor *quadringenta*, quinque *quingenta*, sex *sexcenta*, septem *septingenta*, octo *octingenta*, novem *nongenta*; hos autem dico articulos tertii ordinis.

Decas

Digitized by Google

Def. 7. DEcas centenarum dicitur unum, & usque ad centum ejusmodi decades exclusive eadem obtinent nomina, quæ unitatibus, & decadibus imposita sunt *in Def.* 4. *&* 5. addita tamen voce *mille*; atque hi articuli quarti ordinis. Centum hujusmodi decades dicuntur unum, & usque ad centum exclusive obtinent nomina (*def.nis 6.a*) addita voce *mille*; atque hi articuli quarti ordinis.

Def. 8. DEcas centenarum millium dicitur unum, adiectâ particula *millio*, & usque ad millionem exclusive gaudet respective nominibus, quæ allata sunt in *def.bus* 4. 5. 6. 7. adiecta semper particula *millio*, atque hi articuli sexti, & septimi ordinis.

Def. 9. MIllio millionum dicitur unum, & usque ad millionis millionem eadem habet nomina, quæ *in def.* 9. millionibus tribuuntur, excepta particula *millio*, in cujus locum subrogatur *billio*. Millio *billionum* vocatur rursus unum adjecta particula *trillio*, millio trillionum dicitur *quadrillio*, millio quadrillionum *quintillio*, quintillionum *sextilio* &c. qui etiam classes articulorum constituunt ordinum successivorum.

Cor. 1 NOmina igitur trium primorum articulorum in omnibns consequentibus, si terni terni sumantur, repetuntur cum aliqua adjecta particula, quæ in singulis classibus trium diversa est, adeoque juvat numerum quemlibet concipere divisum in classes trium articulorum.

Cor. 2. SImiliter quoniam sex nomina primorum articulorum repetuntur in

sex

Digitized by Google

ſex articulis conſequentibus, (*def.* 9.) conſultum eſt numerum concipere diviſum in claſſes ſex notarum, quibus poſt prima ſex nomina aliqua adjicienda eſt particula earum, quæ *in def.* 9. recenſentur.

Def. 10. SI numeri diſponantur eo ordine, quo ipſos definivimus, ita ſcilicet, ut conſequens antecedentem unitate excedat, ſeriem naturalem conſtituunt, in qua primus, tertius, quintus &c. alternatim procedendo, dicuntur *impares*, ſecundus vero, & alternatim procedendo quartus, ſextus &c. *pares*.

Cor. PArium primus eſt binarius, ſecundus autem conſtat ex unitate, & ternario (*def.* 4.) hoc eſt ex unitate, binario, & unitate (*def.* 4.), ex duobus ſcilicet binariis (*def.* 4.) eadem ratione oſtendam parem quemlibet ex tot binariis, quot unitates habet numerus exponens ejus ordinem in ſerie parium, conſtare, nimirum par quilibet oritur ex binarii pro unitate ſumpti repetitione, & (*num.* 8. *prol.*) parem quemlibet binarius metitur; per hoc attributum parem definit Wolfius §. 72. *Arith.*

Def. 11. NUmerus exponens modum, quo quantitas unitatem continet, *integer*, exprimens modum, quo in unitate quantitas continetur, dicitur *fractus*, *mixtus* vero, qui ex integro, & fracto componitur.

ARTI-

Digitized by Google

ARTICULUS III.

De Comparatione Numerorum,

Def. 12. MOdus, quo quantitas una aliam continet, dicitur *multiplicitas*; modus autem, quo quantitas una in alia continetur, *submultiplicitas*.

Cor. 1. SI quantitas, quæ in alia continetur, ad instar unitatis sumatur (*num.* 4. *Prol.*) multiplicitas exponetur per numerum integrum, in quo unitas numerans toties repetatur, quoties dicta quantitas in alia continetur (*def.* 11.) Sic si longitudo hujus Scholæ bis continet latitudinem, binarius bis unitatem continens longitudinis super latitudinem multiplicitatem exprimet.

Cor. 2. SI vero quantitas continens unitatis instar consideretur, [*n.* 4. *Prol.*] modus, quo quantitas in quantitate continetur, per numerum fractum exponetur [*def.* 11.).

Def. 13. NUmerus, quo multiplicitas ipsius A super B determinatur, dicitur *exponens* multiplicitatis A super B, & submultiplicitatis B respectu A.

Sch. S*I multiplicitatem* A *super* B *exponat binarius*, A duplum, *si ternarius*, triplum *si quaternarius*, quadrupulum &c. *dicitur*, *&* B *respective* subduplum, subtriplum, subquadruplum &c. *Imo cum simplum, quod est minus, æquale sit parti multipli, quod est majus*, (n. 8. Prol.) *simplum respectu multipli vocari etiam solet pars dimidia*

Digitized by Google

midia, tertia, quarta, quinta &c. si dictus exponens sit binarius, ternarius, quaternarius, quinarius &c. quodsi multiplum ita contineat simplum aiquoties, ut tamen supersit in illo pars, quæ simplum integrum non amplius contineat, sed ejus submultipla sit, tota multiplicitas [cor. 1. & 2. def. 12.] *exponetur per numerum ex integro, & fractione compositum, hoc est per numerum mixtum. Ex quo quatuor multiplicitatis species numeris mixtis exponuntur, uti apparet ex enumeratione casuum, quam hic subdo.* 1. *Aut multiplum continet simplum semel, & unam præterea ipsius partem aliquotam,* 2. *aut semel, & plures ipsius partes aliquotas;* 3. *aut pluries, & unam,* 4. *aut denique pluries, & plures partes aliquotas. Multiplum in* 1. *casu dicitur* superparticularè, *in specie* sesquialterum, sesquitertium, sesquiquartum &c. *si pars illa sit simpli dimidia, tertia, quarta &c. in* 3. multiplum superparticulare, *& in specie* duplumsequialterum, quadruplum sesquisextum &c. *si contineat bis, quater &c., & pars illa simpli sit secunda, vel sexta &c. in* 2. *dicitur* superpartiens, *& quidem secundas, tertias, quartas &c. si partes illæ sint secundæ, tertiæ, quartæ &c. &* superbipartiens *vel* tripartiens, *vel* quadripartiens, *si partes illæ fuerint duæ, tres, quatuor: in* 4. *demum casu dicitur* multiplum superpartiens *in specie* triplum supertripartiens quartas, *si ter contineat simplum, & tres ejus partes quartas &c.. Quinarius respectu quaternarii est* superparticulare, *quia continet semel ipsum, & unam præterea ejus aliquotam, quartam scilicet, proindeque in specie est* ses-

quiquartum; *respectu autem ternarii est* superpartiens, *quia ipsum semel continet, & plures præterea ejusdem aliquotas, quæ cum sint numero duæ, & qualitate tertiæ, dicetur* superbi-partiens tertias. *Novenarius respectu quaternarii est* multiplum superparticulare, *& quidem duplum sesquiquartum, quia bis quaternarium, & unam insuper quartam ejus partem continet; Denarius respectu ejusdem* multiplum superpartiens, *& quidem* duplum superbipartiens quartas, *quia bis continet quatuor, & duas ejus partes quartas. In omnibus his casibus simplum gaudet iisdem nominibus, quibus multiplum, præmissa tamen particula* sub. *Hæc fuse prosequutus sum in gratiam eorum, qui Musicæ Theoreticæ operam daturi sunt. His nominibus exponuntur divisiones Monochordi, quibus suæ respondent consonantiæ, vel dissonantiæ. Sic divisioni duplæ correspondet consonantia, quam* octavam *dicunt, sesquialteræ ea, quam dicunt* quintam *&c.*

Def. 14. QUoniam pars aliquota dicitur etiam mensura (*num.* 8. *Prol.*) Quantitates, quarum una est aliquota alterius, vel quæ communi aliquota gaudent, dicuntur *commensurabiles*, secus *incommensurabiles*. Dari hujusmodi quantitates videbimus in Geometria.

Sch. S*I commensurabilium illa, quæ alterius aliquota est, adhuc aliquotam habeat utrique communem, numerus exprimens primam quantitatem relate ad secundam aliquotam tamquam unitatem, erit etiam commensurabilis numero exprimenti quantitatem secundam in ordine ad unitatem eandem* (def. 1. *&* 14.). *Sin minus, prima nullus*

nullus respondebit numerus, sed sola unitas, cui unice commensurabilis erit numerus secundo respondens. Si communis mensura ipsa aliquotam habeat sibi, & commensurabilibus communem, tum ipsi mensuræ, tum quantitatibus commensurabilibus respondebunt numeri, quorum illi, qui commensurabilibus quantitatibus respondent, commensurabiles erunt ei, qui respondet communi mensuræ, & præterea dictæ secundæ aliquotæ tamquam unitati. Si vero communis mensura talem aliquotam non habeat, nullus ejdem numerus respondere poterit, sed sola unitas (def. 1.) *cui unice commensurabiles erunt numeri quantitatibus commensurabilibus respondentes. In incommensurarabilibus autem neutri, neutriusque parti respondere potest ulla unitas, cui commensurabiles sint numeri ipsis incommensurabilibus respondentes, unde nec integri, nec fracti, nec mixti ipsis respondere possunt* (def. 11.). *Ut id intelligatur, debet fingi exemplum juxta hypotheses nostras, eique applicari debent accurate singula.*

Def. 15. NUmerus unitati tantum commensurabilis *primus* in se, comsurabilis alteri numero in se *compositus* dicitur. Duo numeri simul commensurabiles tantum unitati *inter se primi* dicuntur, commensurabiles alteri numero, vel tales, ut unus sit mensura alterius *inter se compositi* sunt.

Def. 16. NUmerus unitati commensurabilis *Rationalis*, unitati incomensurabilis *irrationalis* dicitur.

Sch. EXcipies *fortasse numeros irrationales propriè numeros dici non posse, cum*

de ratione generica numeri ſit continere unitatem. Sed obſerva in definitione numeri generaliſſima nos pro unitate ſumere partem quamcumque, ſive ea aliquota ſit, ſive aliquanta. Quantitates incommenſurabiles carent aliquota unitate, ſed non aliquanta. Latus, & diameter quadrati ſunt incommenſurabilia; ſed diameter continet latus pro unitate ſumptum modo determinato, veluti recta qualibet rectam ſui aliquotam determinato continet modo; & ſi latus ſumatur pro binario, vel pro quolibet numero, diameter ſemper determinato modo continet lateris medietatem, vel partem quamcumque lateris pro unitate ſumptam. Cum igitur non minus determinatus ſit modus continendi unitatem aliquantam, quam aliquotam, & determinationes ſecundi modi conſtituant unam numerorum ſpeciem, rationalium *ſcilicet, eodem jure alteram numerorum ſpeciem conſtituent ſecundi modi determinationes. Quodſi numeri irrationales dicuntur ineffabiles, dicuntur in hoc ſenſu, quod rationales, qui unitatem reſpiciunt tamquam aliquotam, velut totum, cujus ipſi ſunt vel aliquota, vel aliquota, eorum valorem nequeant attingere. Longe operoſior eſt reductio Wolfiana, in qua deſſudat in Ontologia Wolfius, irrationalium numerorum ad rationem numeri genericam, & minus fortaſſe felix.*

CAP.

CAP. II.

DE CHARACTERISTICA NUMERORUM

ARTICULUS I.

De Characteristica Integrorum.

Def. 17. CHaracteres *primitivos* appello eos, qui numeris simplicibus, seu articulis primis dessignandis destinantur; tales vero primitivorum combinationes, quæ consequentes exprimant, dico *derivativos*.

Sch. *ARticulorum divisio prorsus arbitraria est, sicuti arbitrarius est terminus numerandi, post quem initium reassumitur. Posset enim quemadmodum post denarium, ita post binarium, ut in* Dyadica *Arithmetica, post quaternarium, ut in* Tetractica, *vel post alium quemlibet numerum numerandi initium reassumi, ex quo articuli prodirent diversi ab iis, qui* decadicæ *proprii sunt.*

Theorema I. *IN omni specie Arithmetica universa numerorum characteristica per signa primitiva numerorum simplicium, & ordinum articulorum absolui potest.*

Demonstratio. ARticuli cujuslibet ordinis sunt unitates ordinis primi, cum adjecta aliqua particula sui ordinis (*def.* 4. 5. 6. 7. 8. 9.) ac proinde in ipsis unitates se

 habent,

Digitized by Google

habent, ut genus, & particula illa, ut differentia: Cum ergo definitio rei completa habeatur, si genus, & differentia exprimantur, cujuslibet ordinis sufficienter definientur articuli omnes, si charactere primitivo exponatur qualis sit articuli unitas, & cujus articuli sit unitas; ac proinde per hujusmodi characteres tota numerorum characteristica absolvetur. *Quod erat demonstrandum.*

Theor. 2. *ORdo articulorum numeris exponi potest.*

Dem. ORdines articulorum a se invicem solo gradu differunt, (*def.* 4. 5. 6. 7. 8. 9. & 10.) cum ergo gradus qualitatum sit quantitas, & quantitas quaelibet numeris exponi possit [*cor.* 4. *def.* 1.], omnes igitur articulorum differentiae ita numeris exponi possunt, ut ipsi sufficienter agnoscantur, adeoque, &c. *q. e. d.*

Sch. *SOla attentio ad modum, quo ordines descripsimus, assensum vindicat huic propositioni; ita enim ji in hujusmodi descriptione superiores evadunt, & quodammodo crescunt, sicuti unitatis additione crescunt numeri. Th. hoc etiam obtinet in omni specie Arithmeticae.*

Theor. 3. *IN qualibet Arithmeticae specie, si cujusvis articuli nota simplex ita locetur in serie, ut ipsam tot notae praecedant, quot ordines articulus ille sub se continet, numero exponente articuli ordinem opus non erit.*

Dem. SI enim notae praecedentes numerentur, eo ipso dignoscetur, quot articuli datum praecedant [*hyp.*] ut si datam notam praecedant tres notae, ea erit articulus continens sub se

tres

tres primos ordines. Sed hoc ipſo ſufficienter agnoſcitur, cujus ordinis articulum indigitet illa nota, *v. g.* in dato caſu indigitare quartum, addendo ſcilicet unum numero notarum præcedentium [*Sch. præc.*]. Quare numero exponente ordinem articuli per eam notam indigitati opus non erit. *q. e. d.*

Theor. 4. *IN omni ſpecie Arithmetica, ſi articulus infimus numeri non ſit articulus infimi, ſeu primi ordinis, ſed alicuius ſuperioris, notam ipſius tot loca vacua præcedere debent, quot articulos ille habet ſub ſe.*

Dem. SI numerantur hujuſmodi loca vacua, eo ipſo numerantur notæ, quæ illum articulum præcedere debent, (*hyp.*) & inde agnoſcitur, cujus ordinis ſit articulus dati numeri infimus, (*Th.* 3.) quare cum in dato numero [*hyp.*] articuli locis illis occupandis apti non habeantur (*Th.* 3.) ea loca vacua relinquenda ſunt *q. e. d.*

Sch. *POſtrema hæc duo Theoremata mirum in modum compendioſam magis, atque ſimpliciorem reddunt numerorum characteriſticam. His enim ſublatis tot exponentibus opus eſſet, quot ſunt numeri cujuſvis articuli* (Th. 2.) *qui ſuperflui evadent ſub his legibus poſtremis. Cæterum loca vacua impleri ſolent nota aliqua non ſignificativa, ſeu ſigno nihili, quod etiam punctorum ope fieri poſſet.*

Theor. 5. *IN omni ſpecie Arithmetica, ſi numerus componatur ex articulis interruptis, inter quos ſcilicet alii mediant, inter notas eorum articulorum tot loca vacua deſſignari debent, quot ſunt articuli mediantes.*

Digitized by Google

Dem. DUorum interuptorum articulorum superior sub se continet alium cum ejus inferioribus, & tot insuper, quot inter ipsum, & inferiorem mediant (*def.* 4. 5. 6. 7. 8. & 9) quare cum tot locis promoveri debeat quilibet articulus, quot sub se inferiores habet articulos (*Th.* 3.) & loca, quibus occupandis articuli idonei desunt, vacua desſignanda sint [*Th.* 4.] & articulus inferior ante se habeat tot loca, quot articulos habet sub se [*Th.* 3.] inter ìpsum, & superiorem tot mediabunt loca vacua, quot sunt articuli mediantes. *q. e. d.*

Theor. 6. *IN omni specie Arithmetica notæ articulorum ejusdem ordinis eundem obtinent locum; & contra.*

Dem. ARticuli ejusdem ordinis totidem ordines continent sub se. Jam vero quemlibet articulum tot loca præcedunt, quot ordines ipse habet sub se (*Th.* 3. 4. 5.) nec ea lex pro ullo articulo dispensatur. Igitur notas articulorum ejusdem ordinis totidem loca præcedunt; unde eundem occupant determinatum locum. *q.e.*1.

2. Quot sunt loca præcedentia, tot præcedunt articulorum ordines, adeoque si totidem loca præcedunt, totidem articulos sub se continent illi, quos indicant notæ, quas loca præcedunt. Atqui ji, qui totidem ordines sub se continent, articuli sunt ejusdem ordinis (*def.* 4. 5. 6. 7. 8. 9.) ergo notæ eundem occupantes locum indigitant notas ejusdem ordinis. *q. e.* 2.

Theor. 7. *IN omni specie Arithmetica notæ occupantes eundem locum sunt numeri homogenei.*

Dem.

Dem. DEſſignant articulos ejuſdem ordinis (2. *p. Th.* 8.) in quibus ſcilicet numerandis eadem adjicitur particula poſt nomina ſimplicia [*def.* 4. 5. 6. 7. 8. 9.] ſed ea particula [*def. cit.*] indicat quid in eo ordine dicatur unum. Igitur notæ occupantes eumdem locum eamdem habent unitatem, adeoque (*n.* 3. *Prol.*) numeri homogenei ſunt. *q. e. d.*

Sch. H*Aſce leges generaliſſimas Arithmeticæ decadicæ applicabimus. Ea ſiquidem non modo omnium ſimpliciſſima eſt, ſed & commodiſſima. Denarius procul dubio digitorum numerus homines compulit ad reaſſumendum poſt decadem numerandi initium, in quo conſiſtit Arithmetica decadica.*

Problema I. N*Umerum quemlibet conſcribere.*

Reſolutio. CHaracteres primitivos nobis Arabes tradiderunt, qui ſunt 1. *unum*, 2. *duo*, 3. *tria*, 4. *quatuor*, 5. *quinque* 6. *ſex*, 7. *ſeptem*, 8. *octo*; 9. *novem*, 0. *nihil*, *cyphra*, vel *zero*, quæ pro deſſignandis locis vacuis adhibetur. Notandum ob arabicum fortaſſe legendi morem notas in numeris diſtribui procedendo a dextera verſus ſiniſtram. His poſitis.

1. Si numerus conſcribendus fuerit ſimplex, ipſum deſſignabit aliqua ex ſupraſcriptis notis.

2. Si vero ſit compoſitus, obſervetur numerus ſimplex, qui pronunciatur ante particulam indigitantem ordinem articuli, iſque nota propria indicetur, atque ea nota ad ſiniſtram debite promoveatur juxta leges aſſignatas (*Th.* 3. 4. 5.) *dico factum.*

Obiter

Digitized by Google

Sch. O*Biter hic notandum primo cujuslibet ordinis articulo nullum præfigi numerum simplicem, sed subintelligi unitatem. Sic, non dicimus unam decadem, unum centum, unum mille &c. sed simpliciter, decem, centum, mille &c. cæteris vero præmittitur nomen alicujus numeri simplicis, vel integrum, vel obtruncatum. Sic dum dicimus duomillia, triamillia &c. nomina binarii & ternarii integra præmittuntur voci millium indicanti nomen articuli, at dum dicimus viginti, triginta &c. eadem nomina mutilata præmittuntur. Cæterum ad prompte conscribendos numeros memoriæ figi bene debent particulæ singulorum ordinum propriæ, ut auditis ipsis statim dignoscatur, an articuli sint continui, an discreti, & inde, an inter eorum notas simplices interponendæ sint cyphræ, nec ne, & quot interiici debeant, an, & quot post notam ultimi articuli dati numeri ponendæ sint cyphræ.*

Prob. 2. N*Umerum conscriptum enunciare.*

Resol. 2. QUæratur in principio resolutionis præcedentis nomen cujuslibet notæ, & ex loco cujusvis ordo, cujus articulum illa nota indicat (*Th.* 3. 4. & 5.) atque in *def.* 4. 5. 6. 7. 8. 9. particula illius ordinis propria. Quodsi nomini simplici cujuslibet notæ adiiciatur dicta partcula ordinis propria, numeri conscripti articuli omnes, ac proinde numerus ipse debite enunciabitur. *q. e f.*

Sch. L*Icet numeri ita conscribantur, ut locus articulorum computetur a dextera versus sinistram, pronunciantur tamen a sinistra versus dexte-*

dexteram, incipiendo scilicet ab articulis superioribus, & desinendo in inferioribus. Nota etiam particulam mille, utut communem tribus articulis, non pronunciari, nisi post eorum infimum, & particulam millio, billio, trillio &c. utut communes sex articulis, non enunciari tamen, nisi post eorum infimum; hinc præstat numerum, præsertim si sit prolixus, dividere in classes 1. trium, 2. sexnotarum, & infimo articulo secundarum classium superponere signum aliquod particulæ adiicendæ, v. g. 1. si sit millio, 2. si billio, 3. si trillio &c. particulam mille enunciando semper post infimum articulum classium, super quem nullus index particulæ adiiciendæ habetur. His bene intellectis esto pronunciandus numerus

5 4
32,047,954,380,630,
3 2
415,247,943,000,200,415,943,

in quo curavi, ut omnia præcepta locum habeant; ita juxta illa enunciabitur triginta duo millia, quadraginta septem quintilliones, nongenta quinquaginta quatuormillia, tercenti octuaginta quadrilliones, sexcenta triginta millia quadringenti quindecim trilliones, ducenta quadraginta septem millia, nongenti quadraginta tres billiones, ducenti milliones, quadringenta quindecim millia, nongenta quadraginta tria, in quo observa tot articulorum nomina omitti, quot loca vacua occurrunt. In nota dextima classium, quæ nullum habent indicem semper addenda est vox mille, quod idcirco moneo, quia eam tyrones omittere solent.

Cor. In

Cor. IN Arithmetica decádica nota quælibet uno loco promota ad sinistram acquirit valorem decuplum, promota duobus decuplum decupli, tribus decuplum decupli decupli &c. a sinistra autem ad dexteram procedens obtinet valorem subdecuplum toties, quot sunt loca, quibus promovetur.

ARTICULUS II.

De Characteristica numerorum fractorum:

Sch. *QUoniam simplum consideratur ut pars multipli*, [Sch. def. 13.] *& quidem, aliquota, quippe aliquibus vicibus sumptum præcise in eo continetur, scilicet eum adæquat, ex eodem principio, unde denominatur submultiplicitas simpli, petenda est denominatio partium aliquotarum. Hinc perinde est, sive dicas subtriplum, sive dicas tertiam partem, nisi quod in secundo casu supponitur, aut realis, aut mentalis multipli divisio ex vi, quam habet nomen partis; non item in primo. Hinc fit, ut ipse ille numerus gaudeat nomine exponentis in primo casu, sed in secundo alio nomine, quod explicat sequens.*

Def. 18. NUmerus, ex quo partes aliquotæ nomen dessumunt, dicitur *denominator*.

Cor. SImplum unum respectu alterius ejusdem exponentis, & ad idem multiplum relati dici potest unum [*n.* 4. *Prol.*] ergo partes aliquotæ ejusdem totius, & eodem denominatore fruen-

fruentes dici possunt unum, & numerari eadem ratione, qua numerantur integra. Sed non item, si aut sint ejusdem totius, & diversi nominis, vel vice versa, vel & diversi totius, & nominis.

Def. 19. NUmerus partium aliquotarum dicitur *numerator*.

Theor. 8. *CHaracteristica fractionis ex duplici numero componi debet.*

Dem. TAlis ea esse debet, ut per eam quantitas denotata sufficienter intelligatur. Iam vero fractio est ille numerus, qui unitatem respicit, tamquam aliquota, vel aliquotæ (*def.* 3.) cum igitur partium multitudo non nisi per numerum (*def.* 19.) & earumdem denominatio per numerum itidem [*def.* 18.] sufficienter determinetur, characteristica hæc duplici ex numero, numeratore scilicet, & denominatore coalescere debet *q. e. d.*

Theor. 9. *DEnominator fractionis exponit omnes unius integri aliquotas illius nominis, quod ab ipso dessumitur.*

Dem. EXponens multiplicitatis est numerus oriens ex repetita unitate toties, quoties simplum in multiplo continetur [*sch. def.* 13.] & ejus omnes unitates respondent omnibus simplis, quorum submultiplicitas eo exponente exponitur, in multiplo contentis. Sed simplum est aliquota, multiplum est integrum, denominator est exponens multiplicitatis (*def.* 19.) igitur denominatoris unitates respondent omnibus unius integri aliquotis nominis illius, quod ab ipso denominatore dessumitur.

Nume-

Digitized by Google

Cor. 1. NUmerator eſt numerus hujuſmodi aliquotarum per fractionem expoſitarum, (*def.* 19.) conſequenter in fractione numerator, & denominator numeri ſunt ad ejuſdem nominis aliquotam relati, quorum primus numerat quantitatem fractione expoſitam, alter omnes unius integri partes, ſeu ipſum integrum (*e in Prol.*) eadem aliquota pro unitate ſumpta.

Cor. 2. QUantitas numero quolibet numerata dicitur communiter numeri *valor*; unde (*Cor.* 1.) numerator exponit fractionis, & denominator integri valorem per relationem ad unitatem eandem.

Cor. 3. QUanto ergo numerator denominatore major, vel minor, tanto valor fractionis erit major, vel minor valore integri, &, ſi numerator denominatori æqualis fuerit, uni integro fractio æquivalebit.

Def. 20. FRactio integro æqualis, aut integro major dicitur *ſpuria*; *vera*, quæ integro minor.

Sch. *ALiquotæ numerantur eodem modo, quo cæteræ unitates, nec in ipſis numerandis terminus ullus occurrit, ſicuti non occurrit in numerandis cæteris unitatibus, ex quo elucet poſſibilitas fractionum ſpuriarum; quæ tamen ſub fractionum genere continentur, in quo conſulto non determinavi, an partes per fractum expoſitæ pauciores, an plures eſſe debeant partibus integri, ut numeratio aliquotarum, & integrorum eodem modo eſſent indefinitæ.*

Prob. 3.

Prob. 3. *FRactionem conſcribere, & conſcriptam enunciare.*

Reſol. QUoniam fractionis characteriſtica duplici conſtat nùmero (*Th.* 8.) numeratore ſcilicet, & denominatore, ut alter ab altero probe diſtinguatur, utrique diſtincta, & conſtans ſedes aſſignetur, & [*prob.* 5.] ponatur in ſede numeratoris ſua characteriſtica, ſuaque in ſede denominatoris, quæ [*Cor.* 1. *Th.* 9.] eadem eſt, ac charcteriſtica integrorum. *d. f. q. e.* 1.

2. Numerator enunciatur eodem modo, quo integra, & denominator enunciatur termino adjectivo: quippe hujuſmodi voces rerum qualitatibus, & denominationibus enunciandis a Grammaticis deſtinantur. *d. f. q. e.* 2.

Sch. *SEdes numeratoris a ſede denominatoris diſtinguitur communiter lineola horizontali, numeratorem ſupra, denominatorem infra ſcribendo. Sic tres quintæ ſcribuntur* $\frac{3}{5}$, *& hæc fractio* $\frac{5}{7}$ *enunciatur quinque ſeptimæ.*

Prob. 4. *PArtes integri quomodocumque æqualiter diviſi fractionibus exprimere.*

Reſol. NUmerus omnium partium æqualium, in quas totum integrum dividitur, fractionis denominator eſt (*Th.* 9.) numerus vero partium fractione exponendarum numerator (*Cor.* 1. *Th. cit.*) quibus ſi aſſignetur ſedes juxta *Sch. præc. d. f.*

Sch. *HAbes hinc modum exprimendi in fractis varia menſurarum genera Geometra-*

metrarum, variaque genera ponderum, nummorum &c. Decempeda dividitur in decem pedes, si ergo numerus aliquis pedum sit fractione exprimendus, ille numerus erit numerator, denarius autem denominator. Gradus dividitur in 60 minuta; si igitur numerus aliquis graduum sit exponendus fractione, ipse erit ejus numerator, & 60 erit denominator; libra in duodecim uncias, igitur unciarum numerus v. g. 7 exponetur fractione $\frac{7}{12}$. *Assis Romanus in 5 teruntia, tria igitur teruntia aequivalent* $\frac{3}{5}$ *unius assis. Obolus Genuensis in denarios 12, octo ergo Genuenses denarii aequivalent* $\frac{8}{12}$ *unius oboli.*

Cor. FRactio æquivalet uni integro, ubi numerator æquatur denominatori. Numerus rerum *v. g.* mensurarum, ponderum, nummorum, minutorum &c. speciei inferioris, quas continet species superior, est denominator fractionis, qua ipsa inferiora exponuntur [*sch. praec.*] Igitur unitatem speciei superioris efficiunt tot unitates inferioris speciei, quot in partes inferioris speciei dividitur ipsa species superior. Sic decem pedes efficiunt integram libram, sexaginta minuta integrum gradum &c.

Def. 21. FRactio *decimalis* est, cujus denominator est primus alicujus ordinis articulus, puta 1, 10, 100 &c. & in genere, si fractionis denominator sit primus alicujus ordinis articulus in quacumque specie Arithmeticæ, a nomine

nomine illius Arithmeticæ fractio nomen dessumit.

Cor. 1. QUoniam articulus quilibet superioris ordinis decuplus est articuli homologi inferioris, primus scilicet decuplus primi, secundus secundi &c. (*cor. prob.* 5.) & denominator partibus per numeratorem expositis nomen tribuit ***decimarum***, ***centesimarum*** &c. seu ***subdecuplarum***, ***subcentuplarum*** &c (*def.* 18.) in fractione decimali aliquotæ à numeratore expositæ eodem ordine per subdecuplum, subdecuplum subdecupli &c. descendunt, quò denominator per decuplum, decuplum decupli &c. ascendit.

Cor. 2. IGitur fractio decimalis, cujus denominator sit articulus inferior, respectu alterius, quam denominat proxime superior, se habet, ut articulus superior respectu inferioris.

Cor. 3. SI numerator fractionis decimalis ad sinistram promoveatur, valorem acquiret decuplum (*cor. prob.* 2.), &, si denominator mutetur in articulum superiorem, evadit idem numerator valoris subdecupli [*cor.* 2.] decimalis ergo ejusdem manet valoris, si quot locis promovetur ad sinistram numerator, totidem gradibus augeatur ordo articuli, ad quem spectat denominator; hinc $\frac{3}{10}$, $\frac{30}{100}$, $\frac{300}{1000}$, &c. sunt decimales ejusdem valoris.

Cor. 4. HAbes hinc methodum reducendi fractionem decimalem ad aliam, cujus denominator sit articulus superioris ordinis cujusqumque, tot cyphras scribendo post numeratorem, quot gradibus denominator novus superat

 perat

perat veterem (*cor.* 3.) *v. g.* $\frac{3}{10}$ reducendæ ſunt ad 100000.as, quoniam ordo ſextus 4. gradibus ſuperat ſecundum, fractio $\frac{3}{10} = \frac{30000}{100000}$

Cor. 5. Hinc ex pluribus diverſi nominis decimalbus fieri poteſt una ejuſdem nominis, ſi omnes reducanrur ad denominatorem maximum, [*cor.* 4.] *v. g.* ſint $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{1000}$, $\frac{5}{100000}$, $\frac{8}{100000000}$, quæ reductæ evadent in $\frac{30000000}{100000000}$, $\frac{400000}{100000000}$, $\frac{5000}{100000000}$, $\frac{8}{100000000}$, quodſi in locis vacuis convenientibus numeratoris primi ſubſtituantur notæ ſignificativæ reliquorum, ſalvo earum notarum valore [*Th.* 6.] prodibit unica fractio $\frac{300405008}{100000000}$ omnibus illis æquivalens.

Prob. 4. F*Ractionem decimalem ad formam integri reducere.*

Reſol. QUoniam denominator cujuslibet decimalis conſtanter eſt 1. cum tot cyphris, quot graduum eſt articulus, ad quem pertinet, dempta una, ſi numerator ita conſcribatur, ut numerus locorum ab ejus notis occupatorum ſit idem cum numero cyphrarum, ſeu o adiiciendarum, ipſe denominator, quin conſcribatur, ſufficienter intelligetur, & decimalis integri ſpeciem præſeferet. Si ergo numerator totidem notis conſtet, non alia re opus eſt, niſi ut conſcribatur ſimplex numerator, ſi vero deficiat aliquibus notis, toti-

totidem cyphræ, seu o ipsi ad sinistram adiiciantur, & post ipsam adhuc una interiecto puncto, quæ designat locum, in quo integra terminantur, & eo ipso numerum conscriptum esse decimalem significat: sic $\frac{45}{100000}$ scribetur 0 . 00045. & 3. + $\frac{4}{1000}$ scrbentur 3. 004.

Sch. *Sicuti ex divisione ordinis cujuslibet propria Arithmeticæ decadicæ decimales, ita ex divisione alia qualibet alterius speciei Arithmeticæ propria aliæ fractionum species derivari possunt, quarum proprietates ita hactenus demonstratis affines sunt, ut iisdem fere verbis, (mutatis tantum vocibus decupli &c. propriis divisionis Arithmeticæ decadicæ, quibus decimalium proprietates enunciavimus) demonstrari possint, & earum reductio ad formam integrorum eadem prorsus regula peragatur. Hoc unice intercedit discrimen inter characteristicam decimalium, & earum, quæ oriuntur ex divisione ordinis in plures articulos, puta in* 12, *vel in* 60, *quod in his contingit aliquando, ut eodem denominatore afficiantur duæ notæ, quod in decimalibus non contingit. Dari potest fractio v. g. sexagesimalis composita ex* $\frac{23}{60}$, & $\frac{54}{3690}$, *quæ characteristicè expressa juxta legem allatam evadet* 0. 2354, *quæ præferre videtur denominatorem quarti gradus in Arithmetica sexagecupla. Sed huic malo sufficienter occuritur, si notæ affectæ eodem denominatore aliquo intervallo ab affectis altero removeantur. Sic si scribatur* 0. 23 54 *numerator in duas tantum*

classes divisus apparebit, & denominatorem secundi tantum ordinis sibi vindicabit. Caterum id ex eo oritur, quod Arithmetica sexagecupla numeri omnes simplices peculiarem characterem simplicem non habeant, ut habere deberent, si ea Arithmetica obtineret. Sic si character 23 esset f, *& character 54 esset* x, *ejus fractionis characteristica duabus constaret notis* o. f x, *atque ea separatione opus non esset, ut nec in decadica.*

CAP III.

DE OPERATIONIBUS ARITHMETICÆ

ARTICULUS I.

De Operationibus in Genere.

Def. 22. ADditio est operatio, qua ex duorum, vel plurium numerorum unitatibus omnibus numerus componitur. Numeri dati dicuntur *addendi*, seu *summandi*, numerus inventus dicitur *summa*, *aggregatum*. Signum additionis est +, enunciatur *plus*: sic $a + b$ enunciatur a plus b, significat b addendam ipsi a.

Cor. I. TOtum partes suas omnes simul continet, atque iis simul sumptis æquale est (*e in Prol.*); sed aggregatum continet omnes omnium summandorum unitates, seu (*e in Prol.*) summandos ipsos; est igitur summa totum

tum quoddam ſummandis omnibus ſimul ſumptis æquale.

Cor. 2. SI partes eædem manent, quolibet ordine recenſeantur, totum ſemper manet idem. [*d in Prol.*] Utut igitur diverſimode diſponantur ſummandi iidem, ſumma eorum ſemper eadem eſt [*cor.* 1.] perinde eſt nempe exprimere ſummam *a*, & *b* per $+ a + b$, ac per $+ b + a$.

Cor. 3. SI ipſi *a* addatur o, cum o nullam contineat unitatem (*prob.* 1.) ſumma nil aliud continet præter unitates ipſius *a*: unde $a + 0 = a$.

Def. 23. SUbtractio eſt operatio, qua invenitur numerus datorum duorum differentiam numerans. Datorum major dicitur *minuendus*, minor *ſubtrahendus*, qui invenitur *reſiduum*, *exceſſus*, ſeu *differentia*; ſignum ſubtractionis eſt — enunciatur *minus*, vel *ſubtracto*. Sic $a - b$ enunciatur *a* minus *b*, vel *a* ſubtracto *b*, ſignificat numerum *b* ſubtractum eſſe ex *a*.

Cor. 1. MAjus continet minus, & differentiam [*f in Prol.*] minuendus ergo continet ſubtrahendum cum reſiduo.

Cor. 2. SI minuendus, & ſubtrahendus ſint conſtanter iidem, etiam reſiduum conſtanter idem erit (*e in Prol.*) porro ſubtrahendus eſt, qui ſigno — afficitur, & minuendus, cui ſignum + præfigitur; adeoque ſi eidem quantitati conſtanter ſignum +, & alteri ſignum — conſtanter præfigatur, quocumque tandem ordine quantitates ipſæ conſcribantur, valor formulæ idem conſtanter erit.

Sch. I. *EX hoc corollario, & ex secundo def.* 22. *si detur formula terminis quotcumque, & quocumque signo affectis constans* + a + b − c + d + e − f − g *&c. ea quocumque modo perturbari potest (modo eadem retineantur signa) salvo semper ejusdem valore*, v. g. d + e − g + b − f − c + a *eumdem habet cum prima valorem.*

Cor. 3. SI ex *a* subtrahatur o, differentia erit totus excessus ipsius *a* super o, hoc est tota ipsa *a* (*n.* 5. *Prol.*) unde $a - o = a$.

Cor. 4. SI ex *a* subtrahatur *a*, vel quodlibet aliud quantitati *a* æquivalens, residuum erit o (*g in Prol.*), nimirum $a - a = o$.

Cor. 5. SI quantitas $a = b + d$, sive excedens *b* excessu *d*, ex *b* subtrahatur, residuum erit $b - a$, & substituendo $b + d$ loco ipsius *a* (*n.* 8. *Prol.*) $b - a = b - b - d$, sed $b - b = o$ (*cor.* 4.) igitur residuum erit $- d$.

Sch. 2. *SI quantitas affecta signo* + *in se ipsa spectetur seclusa alia qualibet, ea concipitur nihilo addita, adeoque positiva; si vero in se consideratur quantitas affecta signo* −, *concipietur ex nihilo subducta, adeoque negativa* (num. 5. Prol.) *unde quantitates positivæ merito signo* + *afficiuntur, negativæ signo* −. *Cæterum positivæ solitariæ nullum præfigi solet signum, sicuti nec positivæ in initio formulæ constitutæ, signum autem* − *privativæ præfigi semper debet; & si quantitas occurrat signo nullo affecta, eidem præfixum subintelligitur signnm* +, *quod unice aliquo in casu reticeri potest, numquam signum* −.

Def. 24.

Def. 24. M*Ultiplicatio* eſt operatio, qua ex duobus datis numeris tertius invenitur alterutrum datorum toties repetitum continens, quoties in altero repetitur unitas. Datorum ille, qui repetitur *multiplicandus*, qui modum repetitionis determinat, *multiplicans*, ſeu *multiplicator*, qui invenitur, *factum*, ſeu *productum* vocatur: multiplicator, & multiplicandus dicuntur etiam *factores*. Signum multiplicationis eſt (.) enunciatur *in*: apud plurimos adhiberi etiam ſolet ſignum (*x*). Sæpe etiam conjunguntur factores nullo interpoſito ſigno; ſic *a* . *b* æquivalet *a b*, enunciatur *a* in *b*, vel *a b*, & ſignificat *a* in *b* ductum, ſeu per *b* multiplicatum.

Cor: I. SI multiplicandus toties repetatur, quoties in multiplicatore repeiitur unitas, numerus, qui ita ipſum repetitum continet, erit ſumma tot multiplicandorum, quot unitates continet multiplicans (*def.* 22.), ex quo intelligitur illud arithmeticorum, multiplicationem eſſe compendioſam additionem.

Cor. 2. SI multiplicandus ad inſtar ſimpli conſideretur, factum erit multiplum, & multiplicans exponens multiplicitatis [*def.* 12. & 13.]

Cor. 3. NUmerus quilibet ſemel ſe ipſum continet, ſicuti ſemel ſe continet unitas [*h. in Prol.*] igitur factum ex unitate in numerum quemlibet eſt ipſe numerus. Similiter factum ex numero quolibet in unitatem toties continet unitatem, quoties is numerus eamdem continet; adeoque factum ei numero æquarur (*num.* 8. *Prol.*)

Digitized by Google

Cor. 4. SI *a* per o multiplicetur, factum toties continebit *a*, quoties o continet unitatem. Atqui (*probl.* 1.) o nihil continet unitatis. Ergo factum ex *a* in o = o. Similter si o multiplicetur per *a*, factum toties continebit o, quoties *a* continet unitatem; atqui ex repetitione o quantacumque numerus non prodit [*def.* 1.] ergo factum ex o in numerum pariter est o.

Def. 25. D*Ivisio* est operatio, qua ex duobus numeris tertius invenitur, ita continens unitatem, ut datorum ille, qui dividendus proponitur, continet illum, per quem dividi debet. Datorum primus dicitur *diuidendus*, secundus *divisor*, qui invenitur, *quotus*, seu *quotiens*. Signum divisionis est (:) enunciatur *per*, sic *a* : *b* indicat quotum ex divisione *a* per *b*, & enunciatur *a* per *b*.

Cor. I. CUm quantitas in alia toties contineatur, quoties ab alia demi debet, ut eam annihilet (*n.* 8. *Prol.*), quotus exponit quoties divisor ex dividendo subtrahi possit. Ob hanc rationem divisio apud Arithmeticos dici etiam solet compendiosa subtractio,

Cor. 2. SI divisor sumatur ut simplum, dividendum correspondet multiplo. & quotus exponenti submultiplicitatis (*def.* 12. *&* 13.)

Cor. 3. SI idem per semet dividatur, cum se ipsum non nisi semel contineat (*d. in Prol.*) quotus erit 1.

Cor. 4. SI numerus quilibet per unitatem dividatur, quotus & dividendus eodem

Digitized by Google

dem modo unitatem continebunt, adeoque æquales erunt (*n*. 8. *Prol.*)

Cor. 5. QUodsi unitas dividatur per numerum, non unitatem quidem integram una vice continebit quotus, sed aliqua, ut ita dicam, unius vicis parte, sicuti ipsa unitas dividenda in dividente numero continetur. Quoniam ergo fractio $\frac{1}{n}$ toties continetur in 1, quoties numerator 1 continetur in *n* (*cor.* 3. *Th.* 9.) si *n* sit numerus dividens, fractio $\frac{1}{n}$ toties continetur in 1, quoties dividenda 1 in *n* dividente continetur, h. e fractio $\frac{1}{n}$ est quotus ex 1 per *n*.

Cor. 6. IMo in genere quælibet fractio toties continet 1. vel in 1. continetur, quoties numerator *n* continet denominatorem *d*, vel in eo continetur (*cor.* 3. *Th.* 9.) Quotus ergo ex divisione numeri cujuslibet per numerum quemlibet exponitur per fractionem, cujus numerator sit dividendus, denominator autem divisor.

Sch. I. *Hinc signum fractionum, & signum quoti promiscue usurpantur, ita ut fractio* $\frac{a}{b}$ *scribatur etiam* a: b, *& vice versa, ubi id commodum videatur.*

Cor. 7. SI o dividatur per numerum, quotus nihil unitatis continebit, sicuti o nihil continet numeri (*n.* 5. *Prol.*), adeoque erit o; contra vero si numerus dividatur per o, quoniam o infinities repetitus eum numerum num-

quam

quam adæquare poteſt, (*n. cit. Prol.*) ita nec unitas infinities repetita poterit adæquare quotum, qui proinde erit infinitus (*n.* 8. *Prol.*) & fractio $\frac{a}{o}$ erit infiniti valoris (*cor.* 6.)

Cor. Generale. Cum in additione ex unitatibus datorum componatur unicus numerus, ſcilicet ſumma, vnitas quælibet dati neceſſe eſt ex lege numerandi, ut dici poſſit unum reſpectu unitatum cujuslibet alterius dati, & ſummæ ipſius, atque hinc dati, & ſumma ipſa homogenei eſſe debent. In ſubtractione pariter cum minuendus reſpiciatur expreſſe, ut numerus major, ſubtrahendus ut minor (*def.* 23.) & non niſi homogenea æqualia, vel inæqualia proprie dicantur (*n.* 8. *Prol.*) minuendus, ſubtrahendus, & reſiduus hic pariter homogenei eſſe debent. At in multiplicatione cum datorum unus exprimat quoties inveniendus continere debeat alterum, & illud *quoties* notet relationem ad vices, datorum ergo unus, ut numerans conſideratur, atque ut abſtrahens a quacumque ratione ſpecifica, qua propter neceſſe non eſt, ut ſpecie cum altero conveniat, ſeu ut cum ipſo ſit homogeneus; & cum uterque pro multiplicatore ſumi poſſit, ut infra patebit, uterque numerans eſt, proindeque nec factum factoribus homogeneum eſſe neceſſe eſt. In diviſione pariter, quotus ut numerans expreſſe reſpicitur (*def.* 25.) qui proinde cum datis homogeneus ſit neceſſe non eſt. Imo, ubi infra oſtenderimus dividendum eſſe factum ex diviſore in quotum, conſtabit non requiri quotum diviſori, aut

aut dividendo esse homogeneum. Nec excipias factum esse speciem summæ. Nam hujusmodi summa ex dictis non respondet numeratis, sed numerantibus factorum unitatibus; atque idem dicendum de divisione. Cæterum dum datos, & inventum in additione dicit esse homogeneos Wolfius § 70 *Arith.* propterea quod illi sunt partes, hic totum, sufficienter non videtur attingere homogeneitatis rationem, siquidem ad rationem totius nec ipse in Arith. & Ont. nec alij exigunt partes esse homogeneas.

Sch. 2. *Fieri quidem potest, ut factum non contineat factorum multiplicandum, sed potius in eo contineatur, cum scilicet multiplicator est vera fractio, & ut quotus non contineat unitatem, sed in ipsa potius contineatur, cum nempe divisor est dividendo major, quo ipso multiplicationis, & divisionis definitiones exceptioni obnoxiæ videntur. Sed, si attendatur ad nostram numeri notionem, difficultas omnis evanescit. Numerus scilicet exprimit modum, quo quantitas unitatem continet, qui modus per vics determinatur, & quidem per vices integras, ubi quantitas continet aliquoties unitatem integram, per vicium vero partes, quando quantitas tantum continet ejus partem, aut partes: cum ergo casus, in quo quantitas unitatis tantum partem, aut partes continet, respondeat illi, in quo quantitas in unitate continetur; in nostra numeri notione voce activa continere etiam secundus casus exponitur, sicuti casus primus, totaque differentia pendet a numero numerante vices exponente; ita ut pro-*

Digitized by Google

ut perinde sit dicere quotum contineri in unitate, ac dicere quotum continere unitatis partem, aut partes, continere unitatem non integra vice, sed aliqua parte vicis; & dicere factum contineri in multiplicando perinde sit, ac dicere ipsum continere multiplicandi partem, vel continere multiplicandum aliqua parte vicis unjus.

Def. 26. Factum ex numero *a* in se ipsum dicitur numeri *a potentia*, seu *dignitas secunda*, seu etiam ejus *quadratum*; factum ex numero *a* in ejus quadratum dicitur numeri *a dignitas*, vel *potentia tertia*, vel etiam ejus *cubus*, factum ex *a* in ejus cubum *potentia quarta*, factum ex *a* in ejus dignitatem quartam *dignitas quinta*, & sic deinceps. Porro loco scribendi *aa*, vel *aaa*, vel *aaaa* &c. scribi solet a^2, a^3, a^4, &c. atque hi numeri, qui indicant quoties repeti deberet pro dignitate datà numerus *a*, dicuntur exponentes dignitatum, *v. g.* 2 exponens secundæ, 3 exponens tertiæ &c. Numerus *a* respectu dignitatis secundæ dicitur *radix secunda*, seu etiam *quadratica*, *tertia*, vel etiam *cubica* respectu tertiæ potentiæ, *quarta* respectu quartæ, & sic porro. Signum radicis est $\sqrt{\ }$, exponens vero ipsius est idem cum exponente potentiæ, ad quam refertur, nempe 2 quadraticæ, 3 cubicæ: exponens hujusmodi solet locari intra crura signi radicalis ad hunc modum $\sqrt[2]{\ }$ $\sqrt[3]{\ }$ $\sqrt[4]{\ }$ $\sqrt[5]{\ }$ &c., & exponens radicis secundæ omitti solet, ac loco scribendi $\sqrt[2]{\ }$ scribitur $\sqrt{\ }$.

Sch. Si

Digitized by Google

Sch. SI *numeri polinomii potentia*, *vel radix exponi debeat*, *ipse concluditur intra parentheses*, & *ipsi ad sinistram præfigitur signum radicale*, *vel ad dexteram ponitur exponens dignitatis*. *Sic radix cubica trinomii* $a + 2b - 3c$ *scribitur* $\sqrt[3]{\ }(a + 2b - 3c)$, & *dignitas quinta scribitur* $(a + 2b - 3c)^5$ *Multi scribunt* $\sqrt[3]{\overline{a + 2b - 3c}}$, & $\overline{a + 2b - 3c}^{\,5}$. *Observandum bene est discrimen inter numerum*, *qui præfigitur literis*, *ac vocari solet* coefficiens, & *ipsum exponentem dignitatis*. *Ille enim significat repetitionem per additionem*, v. g. $5a$ *significat summam* a *quinquies repetiti*, *seu* $a + a + a + a + a$; & a^5 *significat repetitionem ejusdem* a *per multiplicationem*, *seu factum* $a.a.a.a.a$.

Cor. EX *def.* 24. ut radix unitatem continet, ita quadratum radicem, ita cubus quadratum, ita dignitas quælibet superior proxime inferiorem.

ARTICULUS II.

Theoremata in toto Algorithmo necessaria.

Th. 10. SI *æqualibus* a, & b *addatur idem* c, *vel æqualia* c, & d, *vel quod perinde est* cor. 2. def. 22. *si eidem* c, *vel æqualibus* c, & d *addantur* a, & b *æqualia*, *summæ erunt æquales* : 2 *Si eidem* c, *vel*

Digitized by Google

c, *vel æqualibus* c, *&* d *addantur inæqualia* a, *&* b, *vel quod rursus perinde est* (cor. cit.) *si inæqualibus* a, *&* b *addatur idem* c, *vel æqualia* c, *&* d, *aggregata erunt inæqualia*.

Dem. 1.° $a + c = a + c$ (*e in Prol.*) sed loco *a* substitui potest *b* (*hyp. &* *n.* 8. *Prol.*) facta igitur actu substitutione $a + c = b + c$; porro etiam loco *c* substitui potest *d* ob eandem rationem, ergo etiam $a + c = b + d$ & (*cor.* 2. *def.* 22.) $c + a = c + b$, & $c + a = d + b$. *q. e.* 1.

2.° Quoniam salva quantitate fieri nequit substitutio in casu secundo (*n.* 8. *Prol.*) ergo summæ in eodem inæquales: (*n. eund.*) *q. e.* 2.

Th. II. *Si fuerit* a > b, *erit* a + c > b + c. *&* c + a > c + b: *Si præterea fuerit* c = d, *erit* a + c > b + d, *&* c + a > d + b, *si vero* c > d, *erit a fortiori* a + c > b + d, *vel* c + a > d + b.

Dem. I. Sit *d* excessus ipsius *a* super *b*, ita ut $a = b + d$ (*k in Prol.*) erit ergo $a + c = b + d + c$ [*Th.* 10.] sed $b + d + c > b + c$ (*n. in Prol.*) ergo etiam $a + c > b + c$ (*m in Prol.*) *q. e.* 1.

2. $a + c = c + a$, & $b + c = c + b$ (*cor.* 2. *def.* 22.) ergo (1. *p & m in Prol.*) $c + a > c + b$. *q. e.* 2.

3. Quodsi $c = d$, erit $b + c = b + d$ (*Th.* 10.) sed $a + c > b + c$ (1. *p.*) ergo $a + c > b + d$ (*m. in Prol.*) *q. e.* 3.

4. Eodem modo, ac in 2. *p.* ostenditur esse $c + a > b + d$ *q. e.* 4.

5. Si

5. Si $c > d$, erit $b + c > b + d$ (1, *p.*) sed $a + c > b + c$ (1. *p.*) ergo a fortiori $a + c > b + d$ (*p. in Prol.*) *q. e.* 5,

6. Et etiam a fortiori esse $c + a > d + b$ ostenditur eodem modo, ac in 2. p. *q, e.* 6.

Cor. $a + c > b + d$ in hyp. th. & (*l in Prol.*) $b + c < a + c$; & simili ratione evincam $b + d < a + c$ &c. h. è in singulis partibus theor. primo æquationis membro ad secundum, & secundo ad primum locum translato signum $>$ mutari in $<$. Porro $a + c$ significat eandem c additam majori a, & $b + c$ eandem c additam minori b. (*def.* 22.) igitur eo ipso, quod ostendimus summam primam esse majorem secunda, ubi majoris, & minori idem addatur, ostendimus etiam summam primam esse minorem secunda, ubi minori, & majori idem adiiciatur; atque idem cæteris partibus applicari potest.

Theor. 12. *IN subtractione signa subtrahendæ mutantur in contraria*

Dem. SI quantitas simplex b ex minuenda quacumque, sive simplici, sive composita a (*def.* 23.) subtrahi debeat, residuum erit $a - b$, si subtrahatur composita $b + c$ erit facta subtractione primæ partis b residuum $a - b$, quod considerari potest ad instar simplicis quantitatis, quam dico x, ex qua si subtrahatur c residuum erit $x - c$ (*def.* 23.) & substituendo $a - b$ loco x (*n.* 8. *Prol.*) erit idem residuum $a - b - c$. Si subtrahenda componatur ex aliis adhuc partibus positivis, eodem modo ostendetur in residuo eas affectum iri signo $-$, adeoque signum

Digitized by Google

gnum + in ſubtrahenda per ſubtractionem mutari in −. Quodſi ſubtrahenda componatur ex parte poſitiva, & negativa, ut $x - z$, ex minuenda a non tota x ſubtrahi debet, ſed tantum exceſſus x ſuper z. [*def.* 23.) Porro x continet z, & hunc exceſſum (*k in Prol.*). Igitur ſi ex a ſubtrahatur x, ex a ſubtrahitur hic exceſſus, qui vere ſubtrahi debet, & præterea z, quæ ſubtrahi non debebat. Ne igitur plus æquo ſubtrahamus, ſubtracto x ex a reſiduo $a - x$ adjici debet z plus æquo ſubtracta, adeoque reſiduum verum eſt $a - x + z$; conſequenter ſignum − in +, & + in − in ſubtractione mutari debet *q. e. d.*

Th. 13. *SI ab æqualibus* a *&* b *idem* c, *vel æqualia* c, *&* d, *vel ſi ab eodem* c *æqualia* a, *&* b *ſubtrahantur, reſidua erunt æqualia.*

2.o *Si ab æqualibus* a, *&* b, *vel ab eodem* x *ſubtrahantur inæqualia* c, *&* d, *vel ſi ab inæqualibus* c, *&* d *ſubtrahatur idem* a, *vel æqualia* a, *&* b, *differentiæ erunt inæquales.*

Dem. 1.o $a - c = a - c$ (*e in Prol.*) ſed loco a ſubſtitui poteſt b (*num.* 8. *Prol.*) ergo $a - c = b - c$. Quodſi $c = d$, ſi loco c ſubſtituatur d (*num.* 8. *Prol.*) erit etiam $a - c = b - d$; ſimiliter $c - a = c - a$ (*e in Prol.*) & loco a ſubſtitui poteſt b (*hyp. & n.* 8. *Prol.*) ergo $c - a = c - b$.

2.o Quoniam in ſecunda hypotheſi numquam ſubſtituere licet d in locum c, patet. (*n.* 8. *Prol.*) in eadem differentias ſemper fore inæquales.

Th. 14.

Th. 14. *Si fuerit* $a > b$, *erit* 1.° $a - c > b - c$, *quodsi* $c = d$, *erit etiam* 2.° $a - c > b - d$. *At* 3.° $x - a < x - b$; *quodsi* $x = z$, *erit etiam* 4.° $x - a < z - b$. *Si* $c < d$, *erit* 5.o *multo magis* $a - c > b - d$; *& si* $x < z$ *erit* 6.° *multo magis* $x - a < z - b$.

Dem. I. Si excessus a super b sit d, erit $a = b + d$ [*k in Prol.*] unde $a - c = b + d - c$ [*Th.* 13.] sed $b + d - c > b - c$ (*n. in Prol.*) ergo (*o in Prol.*) $a - c > b - c$. *q. e.* 1.

2. $a - c > b - c$ [1. *p.*] sed $b - c = b - d$ (*hyp. & Th.* 13.) ergo (*o in Prol.*) $a - c > b - d$. *q. e.* 2.

3. $x - a = x - b - d$ (*Th.* 13.) $x - d$ est pars ipsius x (*def.* 23.) quæ si dicatur p, erit $x - b - d = p - b$. Porro $x > p$ (*n. in Prol.*) & (1. *p.*) $x - b > p - b$, adeoque $p - b < x - b$ (1. *p.*) sed $p - b = x - b - d = x - a$ (*hyp.*) ergo $x - a < x - b$ (*o in Prol.*) *q. e.* 3.

4. Quodsi $x = z$, erit (1. *p.Th.*13.) $x - b = z - b$, atque hinc [*o in Prol.*] $x - a$ (*quæ* $< x - b$ (3. *p.*) $< z - b$. *q. e.* 4

5. $b - c < b - d$ (*hyp. &* 1. *p.*) sed $a - c > b - c$ (1. *p.*) ergo (*p. in Prol.*) $a - c > b - d$. *q e.* 5.

6. $z - a < z - b$ (*hyp. &* 3. *p.*) sed (1.*p.*) $x - a < z - a$. ergo (*p. in Prol.*) à fortiori $x - a < z - b$. *q. e.* 6.

Sch. *Consulto theoremata identidem enuncio characteristice, ut statim assuescatis*

Digitized by Google

notionibus abstractis, & significatus caracterum vobis reddatur familiaris. Asperum videbitur hujusmodi idioma, sed experientia ipsa comprobabit esse non modo familiari compendiosius, & felicius, sed etiam clarius, modo signis prompte ideas rerum signatarum adnectatis. Ea de causa utilissimum vobis erit, si theoremata, quæ enunciamus characteristicè, in familiare idioma, & si, quæ enunciamus familiariter, in idioma characteristicum traducatis, & vos ipsi mutuo vobis proponatis etiam alias propositiones hujus generis, aut familiariter expressas, & characteristice exprimendas, aut vice versa.

Th. 15. *QUolibet ordine se multiplicent duæ quantitates, idem factum producunt.*

Dem. SIt multiplicanda *a*, multiplicans *b* erit factum [*def.* 24,] *a b*, quod si multiplicans fuerit *a*, multiplicanda *b*, idem factum erit *ba* [*def. cit.*] intelligatur porro *b* solvi in unitates, factum *a b* toties continebit *a*. 1. quot sunt unitates ipsius *b*, sicuti *ba* toties continet eandem; sed *a* = *a* 1. (*cor.* 3. *def.* 24.) adeoque *b a* toties continet *a*. quoties *a b* continet *a*, quoties scilicet *b* continet unitatem. Igitur (*num.* 8. *Prol.*) *b a* = *a b*. *q. e. d.*

Cor. I. SI quantitates multiplicandæ fuerint *a*, *b*, *c*. duæ quælibet ipsarum *v. g. a*, *b* quocumque ordine multiplicatæ unum, & idem factum producent, adeoque factum ipsum unica litera. *v.g. x.* indigitari poterit. Est vero *x c* = *c*. *x*. (*Th. præc.*) ergo *a b c* = *c a b* & *b a c* = *c b a*

$= c\,b\,a$, facta nimirum substitutione (*num:* 8. *Prol.*] similiter *a*, & *c* quocumque ordine multiplicentur etiam idem factum producunt, quod unica litera *z* indigitare licet. Est vero $bz = zb$ (*Th.præc.*) igitur $a\,c\,b = b\,a\,c$ & $c\,a\,b = b\,c\,a$; simili modo ostendetur quatuor, quinque &c. quantitates quocumque ordine multiplicatas semper idem factum producere.

Cor. 2. Cum multiplicans sit exponens multiplicitatis facti supra multiplicandum [*Cor.* 2. *def.* 24.] & pro multiplicatore haberi possit quivis factorum, patet, si exponens multiplicitatis sumatur pro simplo, simplum evadere exponentem multiplicitatis. Sic 3 exponit multiplicitatem 12 super 4, & vice versa 4 eiusdem 12 multiplicitatem super 3.

Th. 16. *In multiplicatione signa eadem efficiunt* +, *diversa* −.

Dem. Sint 1.° ambo factores *a*, & *b* positivi, h. è affecti signo +. Factum *a b* toties continet positivum *a*, quoties *b* continet unitatem. (*def.* 24) adeoque, si *a* in facto pro unitate sumatur, factum ipsum coalescit ex unitatibus positivis. Est itaque positivum, (*n.* 5. *Prol.*) adeoque affectum signo +. (*sch.* 2 *def.* 23.) Sit 2.° factor alteruter *a* negatiuus, & alter *b* positiuus factum *a b* toties continet factorem negativum *a*, quoties *b* continet unitatem [*def.* 24) adeoque, si *a* sumatur pro unitate, factum *a b* coalescit ex unitatibus negativis. Est igitur [*num.* 5. *Prol.*) factum *a b* in hoc casu negatiuum, adeoque afficiendum signo − (*sch. cit.*)

Digitized by Google

3 Sit denique factor uterque negativus, hoc est signo — uterque afficiatur, ergo factum *a b* toties continet factorem — *a*, quoties factor — *b* continet 1. (*def.* 24.) Porro factor — *b* non continet unitatem positivam, sed potius unitatis negationem, seu unitatem negativam [*num.* 5. *Proleg.*] ergo etiam factum non debet continere factorem negativum — *a*, sed ipsius potius negationem, seu factorem positivum *a*, adeoque debet esse positivum (*num.* 5. *Proleg.*] & affectum signo + (*sch. cit.*)

Sch. *DIctum est in demonstratione in positiva quantitate negativam non contineri, & vice versa, & quidem vere, ac proprie. Quantumlibet enim una repetatur, valorem alterius numquam attingit, imo ab eo semper magis removetur. Nihilominus fingitur a mathematicis* 1 *ad* 0 *rationem habere infinitam, seu infinities continere, &* 0 *ad* — 1 *iterum infinitam rationem habere, unde* 1. *ad* — 1 *rationem habet infinities infinitam. Cum vero* (num. 5. Prol.) *non repugnet considerare negatiuum ad instar positivi, & in hoc casu positiuum ad instar negativi se habeat, etiam* — 1 *ad* 1 *habet rationem infinities infinitam considerata in* — 1 *ratione defectus, cujus conceptus sensus est, sicuti positiuum infinite superat nihilum, & nihilum infinite superat negatiuum, ita verus defectus infinite superat nihil defectus, & nihil defectus infinite superat negatiuum defectum, nempe quantitatem positivam. Ex quo sequitur* — b *ad* 1 *dicere rationem toties infinities infinitam, quoties* b *continet unitatem, &* ab *ad* — a, *seu dividendo antecedens, & consequens*

Digitized by Google

sequens per a , b *ad* — 1 *itidem rationem toties infinities infinitam, quoties* b *continet unitatem, nisi quod in prima ratione, ut termini in aliquo respectu* (num. 8. Proleg.) *conueniant, & homogenei sint, habetur ratio negationis, in secundo habetur ratio positionis. Certe unius ejusdemque rationis termini opus est, ut spectentur sub eodem respectu* (num. 8. Prol.) *ut a nobis hic factum est, sed nil vetat quominus termini unjus sub uno, & termini alterius sub altero spectentur; sic in una ratione termini referri possint ad pretium, in altera ad pondus mercis. Quod si* n *sit numerus infinitus,* n^2 *infinities infinitus, erit* n^2 b : 1 *ratio* — b : 1, & n^2 b : 1 *ratio* a b : — a, *adeoq,* — b : 1 = ab : — a = n^2 b : 1 = b : — 1. *Non nulla ex capite IV hic dessumpsi compendium loquendi facturus, cum tamen non desint in antecedentibus principia, ex quibus intentum meum ostendi possit. Hæc idcirco monui, ut occurrerem difficultati, quæ contra 3. part. demonstrationis afferri solet. Alijs etiam modis demonstrare potuissem, ut alij omnes Arithmetici, hanc partem, sed nullum hactenus inveni, qui ex natura multiplicationis flueret, sicuti præsens noster; qui si alicui difficultati obnoxius est, id ipsum incommodum habeo commune cum cæteris, licet cæteri non omnes,* (& ni fallor nemo) *ei difficultati occurrat.*

Cor. SI signa utriusque factoris mutentur in contraria, post mutationem manent adhuc eadem, vel diversa, sicut ante mutationem, adeoque factum obtinebit idem signum, perinde ac si mutatio facta non esset.

Digitized by Google

Th. 17. *SI factum dividatur per factorum alterutrum, quotus erit factor alter.*

2 Si quotus ducatur in divisorem, factum erit dividendum.

Dem. 1. FActum *a b* toties continet factorem alterutrum *a*, quoties *b* continet 1 (*def.* 24 & *th.* 15.) sed si factum *a b* sumatur pro dividendo, & *a* pro divisore, etiam quotus toties continet 1, quoties *a b* continet *a* (*def.* 25) ergo quotus, & *b* eodem modo unitatem continent, proindeque [*num.* 8. *Prol.*] sunt æquales *q. e.* 1.

2 Si divisor sit *d*, & quotus *c*, factum *c d* toties continet *d*, quoties *c* continet 1 (*def.* 24) sed etiam dividendum toties continet divisorem *d*, quoties quotus *c* continet 1. (*def.* 25) igitur factum, & dividendum eodem modo contineat eundem numerum *d*, proindeque [*num*: 8. *Prol.*) æquantur .. *q e.* 2.

Cor. I. DIvisor, & quotus se habent ut factores dividendi (2. *p.*) cum igitur, si factum dividatur per factorum alterutrum, prodeat alter (1. *p.*) sicuti si dividendum dividatur per divisorem, prodibit quotus, ita si dividendum dividatur per quotum, prodibit divisor.

Cor. 2. QUoniam factum negatiuum respondet factoribus, quorum unus sit positivus, negativus alter (*Th.* 16) igitur sì dividendum fuerit negativum, & divisor positiuus, quotus erit negatiuus, si quotus positiuus, neccessario divisor erit negatiuus, & cum factum positiuum

(*Th.*

Digitized by Google

[*Th.* 16) reſpondeat factoribus, aut ſimul poſitivis, aut ſimul negativis, si dividendum fuerit poſitiuum, & diviſor poſitiuus, etiam quotus erit poſitiuus, ſi diviſor negatiuus, etiam quotus erit negatiuus, ſcilicet etiam in diviſione ſigna eadem efficiunt +, diverſa minus.

Cor. 3. ET, si diviſoris, ac dividendi ſigna mutentur in contraria, ſignum quoti erit illud ipſum, quod foret ijs non mutatis

Cor. 4. SI quantitas *a* ducatur in *b*, factum erit *a b* (*def.* 24) quodſi per *b* dividatur, quotus erit *a* (2. *p. Th. præſ.*] conſequenter ſi eadem quantitas multiplicetur, & dividatur per idem, eadem ſemper manet.

Cor. 5. SI factor *a* ducatur in *c*, & factor alter ſit *b*, factum erit *a c b* (*def.* 24) ſeu *a b c* (*Th.* 15] adeoque erit ita multiplum ipſius *a b*, ſicuti *c* eſt multiplum unitatis (*cor. def.* 24] Quodſi præterea factor alter *b* dividatur per *c*, ipſe evadet ita ſubmultiplus, ſicuti *c* eſt multiplum unitatis (*cor.* 2 *def.* 25) & factum ex *a c* in ipſum *b* per *c* diviſum ita erit ſubmultiplum *a b c*, ſicuti *c* eſt multiplum unitatis (*cor.* 2 *def.* 24) igitur si factorum unus multiplicetur, alter dividatur per idem, perinde eſt, ac si factum ipſum per idem multiplicetur, ac dividatur (*def.* 24, & 25) adeoque factum manet idem (*cor.* 4.)

Cor. 6. CUm dividendus *a d* reſpondeat facto, & diviſor *a* factorum uni, quotus *d* alteri, ſi dividendus *a d* ducatur in *c*, & diviſor *a* ducatur pariter in *c*, ſitque *a b c* = *a c b* *Th.* 15) quotus ſemper erit *b* (2.*p. Th. præſ.*)

Digitized by Google

igitur si divisor, & dividendus per idem c multiplicentur, quotus idem manebit.

Cor. 7. SI divisor a, & dividendum ab dividantur per c, quoti erunt $\frac{a}{c}$, & $\frac{ab}{c}$ (*sch.* 1. *def.* 25.) sed salvo quoto prodeunte ex divisione $\frac{ab}{c}$ per $\frac{a}{c}$ possumus multiplicare tum $\frac{a}{c}$ divisorem, tum $\frac{ab}{c}$ dividendum per c (*cor.* 5.) & facta multiplicatione prodit in primo casu a, in secundo ab (*per* 2. *p. Th. præs.*) perinde est ergo dividere $\frac{ab}{c}$ per $\frac{a}{c}$, ac ab per a, scilicet si divisor, & dividendum per idem dividantur, quotus manet idem.

Th. 18. S*I fuerit* $a = b$, *erit* $ac = bc$, *&* $ca = cb$, *&*, *si* $c = d$, *erit* $ac = bd$, *&* $ca = db$. 2. *si* $a > b$, *etiam* $ac > bc$, *&* $ca > cb$, *&*, *si* $c = d$, *erit* $ac > bd$, *&* $ca > db$. 3. *&*, *a fortiori*, *si* $c > d$, *erit* $ac > bd$, *&* $ca > db$.

Dem. EAdem est cum *dem. theor.* 10. *&* 11. ita ut eas hic transcribere liceat mutato tantummodo signo additionis in signum multiplicationis, & vocibus signo additionis respondentibus in respondentes signo multiplicationis.

Cor. 1. SI factores ijdem manent, idem etiam manet factum (1. *p.*) sed si signa factorum mutentur in contraria, signum facti non mutatur (*Cor.* 3. *Th.* 15.) ergo si signa factorum mutentur in contraria, & factores non mutentur, factum idem est, perinde ac si nulla mutatio facta esset.

Digitized by Google

Cor. 2. CUm multiplicator ſit exponens multiplicitatis, multiplicandus ſimplum, & factum multiplum [*cor.* 2. *def.* 24.] ergo ſi ſimpla fuerint æqualia, & exponens multiplicitatis idem, vel duo æquales, etiam multipla ſunt æqualia, sì idem ſit exponens multiplicitatis, & ſimpiorum unum altero maius, etiam multiplum primum erit altero maius; ſi ſimplum primum ſecundo maius, primus exponens ſecundo itidem maior, multiplum primum erit multo maius ſecundo.

Th. 19. *SI fuerit* a = b, *erit* a: c = b: c, *&* c: a = c: b; *ſi prætera* c = d, *erit* a: c = b: d, *&* c: a = d: b. 2. *ſi fuerit* a > b, *erit* a: c > b: c, *ſed* c: a < c: b. *ſi præterea* c = d, *erit* a: c > b: d, *ſed* c: a < d: b. 3. *ſi denique* d > c, *erit a fortiori* a: c > b: d, *ſed etiam a fortiori* c: a < d: b, *& contra*.

Dem. SI leviſſima quavis attentione utaris, etiam Theoremati huic demoſtrationes Theorematnm 13. & 14. facili negotio applicabis; ut proinde eas hic repeti ſuperfluum ſit.

Cor. 1. EAdem ratione, ac in (*cor.* 1. *th: præc.*) liquet quotum manere eundem, eodemque ſigno affectum, ſi diviſor, & dividendus ijdem maneant, licet eorum ſigna mutentur in contraria.

Cor. 2. POrro etiam hic diviſor ſimplo, dividendus multiplo, quotus exponenti reſpondet. Igitur ſi multiplum, & ſimplum in duobus caſibus fuerint eadem, etiam idem erit utrobique exponens ſubmultiplicitatis: ſi multiplum,

Digitized by Google

tiplum, & exponens fuerint eadem, eadem quoque erunt ſimpla, ſeu ſubmultiplicia: &, ſi multiplum unum ſit maius altero, exponens idem, etiam primum ſimplum erit ſecundo maius, ſi multiplum unum altero maius, & ſimplum idem, vel duo æqualia, exponens primus ſecundo erit maior. Contra, ſi multipla duo fuerint æqualia, & ſimplum unum altero maius, exponens primus erit ſecundo minor, ſi exponens primus fuerit altero maior, ſimplum primum erit ſecundo minus. Denique ſi multiplum primum fuerit ſecundo minus, & ſimplum primum ſecundo maius, erit exponens primus multo minor ſecundo, ſi multiplum primum ſecundo minus, & exponens primus ſecundo maior, etiam ſimplum primum multo minus ſecundo.

Habes in præſenti, atque antecedenti corollario exemplum traductionis propoſitionum ab idiomate characteriſtico ad idioma commune, quam in ſcholio Theor: 14. commendauimus.

ARTI-

Digitized by Google

ARTICULUS III.

De operationibus Arithmeticæ in numeris integris.

Prob. 6. *NUmeros ſimplices addere, ſubtrahere, multiplicare, & dividere.*

Reſol. I. PRo additione ex lege numerandi tradita in *def.* 4. 5. 6, 7, 8. 9. notetur numerus ſuperior, quem efficit datorum unus cum unitate, iterum ille, quem efficit inventus cum alja unitate, adhuc ille, quem efficit ſecundo inventus cum unitate, rurſus ille, quem cum alia unitate efficit tertio inventus &c. & hæc operatio toties repetatur, quot ſunt unitates ſecundi ſimplicis dati. Numerus ultimo inventus erit ſumma primorum duorum datorum. (*def.* 22) hæc ſumma conſideretur, ut datorum primus, eique adijciatur datorum tertius, nunc invento adijciatur quartus, & ita porro. Quoniam [*hyp.*] dati numeri ſunt ſimplices, qui numerum digitorum excedere nequeunt; commodum eſt unitates adjiciendi deſſignare in digitis manuum, & pro ſingulis vicibus, quibus una unitas additur alteri datorum tamquam fundamento, digitum unum claudere, ubi enim clauſi omnes fuerint, numeri deſſignati in manibus unitates omnes ab invento exhauſtas eſſe certus eris [*e in Prol.*] *q. e.* 1. *f.*

2. Pro

2. Pro ſubtractione eadem eſt operatio cum hoc tantum diſcrimine, quod in additione ſumendus ſit numerus proxime ſuperior, in ſubtractione vero numerus proxime inferior. Commodum etiam hic eſt unitates ſubtrahendi, qui [*hyp*] ſimplex eſt, deſſignare in digitis manuum. Cæterum minuendum eſſe ſimplicem non eſt neceſſe, atque ita fit *q. e.* 2.

3. Deſcribatur quadratum ABCD, & ejus latera ſingula dividantur in 9. partes æquales, ac puncta diviſionum rectis connectantur: hoc ipſo quadratum totum dividetur in novem ſeries quadratulorum, quarum quælibet 9 quadratulis conſtabit. In quadratulis horinzontalis ſeriei ſupremæ AB ſcribantur a ſiniſtra verſus dexteram numeri ſimplices, & itidem deſcendendo in quadratulis ſeriei ſiniſtimæ verticalis AD. Numerus, qui eſt in primo quadratulo cuiuſcumque ſeriei, addatur ſibimet (1. *p.*), & ſumma ſcribatur in ſecundo quadratulo eiuſdem ſeriei. Huic ſummæ rurſus addatur ille numerus (1. *p.*), & ſumma ſcribatur in tertio quadratulo, atque ita porro, donec omnia ſeriei illius quadratula impleveris. Simili regula invenies numeros in quadratulis ſerierum reliquarum conſcribendos. Tabula hac methodo deſcripta dicitur Pythagorica, ea multiplicationi, & diviſioni ſimplicium mirum in modum inſervit; ſed antequam ad has operationes eam applicemus, aliquid in ipſa obſervandum eſt.

1. Numerum in quolibet quadratulo conſcriptum, toties continere numerum conſcriptum in primo quadrato ſeriei, quot locis promovetur a ſiniſtra verſus

versus dexteram illud ipsum quadratulum [1. *p.*)

2. Numeros scriptos in fronte Tabulæ indicare quot locis a sinistrâ versus dexteram promota sunt singula inferiora quadratula (*construct.*) *e. g.* in quadratulo 5.° quartæ seriej habetur 20, qui quinquies continent 4 scriptum in primo, & in fronte Tabulæ ipsi quadratulo quinto respondet 5,

TABULA PYTHAGORICA:

A B

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

D C

4. Numerus ergo cuiuslibet quadratuli toties continet numerum primum seriei, ad quam spectat, quoties numerus conscriptus in fronte continet 1. adeoque est factum ex numero primo sercii in nume-

numerum in fronte, qui respondet illi quadtatulo, (*def*.. 24) proindeque ad multiplicationem simplicium non alia re opus est, quam ut multiplicandus in serie sinistima horizontali, multiplicator in fronte Tabulæ quæratur, noteturque quadratulum, in quo series horizontalis illa secat verticalem, in cuius fronte multiplicator habetur; in eo enim leges factum quæsitum.

5. o Si dividendus non excedat numerum ultimum Tabulæ 81, eadem tabula inservit etiam divisioni. Quæratur enim in serie verticali sinistima divisor, & in serie horizontali divisori respondente dividendus; numerus in fronte Tabulæ huic dividendo respondens erit quotus (2. *p. Th.* 17.), quodsi dividendus in ea serie non habeatur, ejus loco in ipsa serie sumatur numerus proxime minor ipso dividendo, & quotus proximus exhibebitur in fronte Tabulæ, ut supra. Dico *quotum proximum*, quia exacte respondebit solum numero in Tabula assumpto, & non vero dividendo, cuius excessus supra numerum assumptum in Tabula adhuc dividi debet per eumdem divisorem, ut habeatur verus quotus; *v. g.* debent dividi 59. per 7. in septima columna horizontali, quæ in primo quadratulo exhibet divisorem 6, non occurit dividendus 59, & numerus ipso proxime minor in eadem occurrens est 56, cui respondent in fronte 8; igitur quotus proximus erit 8, & residuum (*excessus* 59 *supra* 56), erit 3, quo per 7 diviso, habentur $\frac{3}{7}$ (*cor*. 6. *def*. 25.) quotus ergo accuratus est numerus mixtus $8 + \frac{3}{7}$

6. Nume-

6. Numeri etiam indeterminati in *ſimplices*, & *compoſitos* dividuntur; ita ut *compoſiti* dicantur, qui ex partibus conſtant mediantibus ſignis vel +, — coniunctis, *ſimplices*, qui non item; atquè hi quidem dicuntur *monomia*, illi *polinomia*, in specie *binomia*, *trinomia*, *quadrinomia* &c. ſi duabus, tribus, quatuor &c. partibus componantur; in quo ſenſu apparet non dici compoſitos, quia 9 maiores, quemadmodum determinati, ſed quia involuunt plures numeros mediantibus operationibus per ſigna indicatis in unum numerum reducendos. Sic $a + b$ eſt numerus compoſitus ex duobus in unum reducendis mediante additione, $a + b - c$ eſt numerus in unum reducendus mediante ſumma primarum partium a, & b. & ſubtractione tertiæ c ex dicta ſumma; & ſenſus $a + b$ eſt ſumma a, & b, ſenſus $a + b - c$ eſt differentia inter c & ſummam a, & b; hæc omnia manifeſta ſunt ex *def.* 22. *&* 23. monomiorum igitur, ſeu ſimplicium numerorum indeterminatorum additio fit mediante ſigno +, ſubtractio mediante ſigno —, multipiicatio coniugendo factores nullo interpoſito ſigno, diviſio interpoſito ſigno (:) inter dividendum, & diviſorem, vel poſito dividendo loco numetatoris, & diviſore loco denominatoris (*cor.* 6. *def.* 25.) vel denique delendo divisorem in dividendo, si ipſum ſit productum factorum, quorum aliquis eadem litera, quo diviſor, indigitetur. Quæ omnia manifeſta ſunt ex *definitionibus* 22, 23, 24, 25, ex (*cor.* 6. *def.* 25. *&* *ex Th.* 16.) *e.g.* ſumma monomiorum a, b, c, d, e, &c. erit $a + b + c + d + e$ &c. Differentia monomiorum a, *&* b erit.

Digitized by Google

erit $a - b$; factum ex monomiis a, & b erit $a\,b$; & quotus ex a per b, $a:b$, vel $\frac{a}{b}$, ex $a\,b$ per a erit b; atque en tibi methodum operandi in ſimplicibus numeris tum determinatis, tum indeterminatis *q. e. f.*

Prol. 7. POlinomium reducere ad ſimpliciorem expreſſionem.

Reſol. COntingit, ut aliquot polinomij partes eadem litera indigitentur, quo in caſu polinomium ipſum reddi poteſt ſimplicius. Duo obſervantur in hoc caſu, nimirum ſignum, quo partes eadem litera deſſignatæ afficiuntur, & an numerus aliquis ipſis præfigatur, an nullus, quo in caſu præfixa intelligitur unitas (*e in Prol.*) ſi igitur partes eadem litera deſignatæ fuerint omnes poſitivæ, vel negativæ omnes, in unam ſummam colliguntur numeri ipſis præfixi (*1. p. prob. 6.*) vel si ji numeri compoſiti fuerint (*prob. 8.*) & huiuſmodi ſumma præfigitur datæ literæ, eaque erit poſitiva in caſu poſitivarum partium, negativa in caſu negativarum; ſi vero partium earundem aliæ fuerint poſitivæ, negativæ aliæ, in unam ſummam colligantur numeri poſitivarum, & negativarum, & horum numerorum minor ex maiore ſubducatur, reſiduumque rurſus illi literæ præfigatur, quod erit poſitiuum, vel negatiuum, si numerus minuendus fuerit poſitiuus, vel negatiuus: ſic polinomium $2a + b - a + 4a - 3b + 4c - d - c - b + 8a = 13a - 3b + 3c - d$

Dem. QUoniam [*e in Prol.*] quantitas quælibet reſpectu homogeneæ una eſt; igitur quantitas litera indigitata numero præfixo hunc

Digitized by Google

hunc habet ſenſum, ut littera ſit nomen unitatis, ſeu indigitet quid pro unitate ſumatur, numerus vero eius unitatis repetitionem exprimat. Quamobbrem, eandem ratione. qua in numeris, in iídem quantitabus eſt operandum. Cæteri actus reſolutionis rationem habent in ſignis polinomii; additur enim, ubi occurrit ſignum +, ſubtrahitur ubi occurit ſignum —, præmititur ſignum + ſummæ, & differentiæ, quando eſt numerus prodiens ex repetitione unitatum poſitivarum, & præfigitur ſignum — ſummæ, ac differentiæ, quando eſt numerus oriens ex repetitione unitatum negativarum.

Sch. A*T etiam adduntur ſibi invicem negativæ: ita, ſed adduntur, ut in unum numerum colligantur numeri omnes jis præfixi, & huic numero præfigitur ſignum —, quo ipſo uno ſimul actu ſubtrahuntur, quæ in polinomio propoſito non niſi pluribus actibus ſubtrahebantur. Quod vero, ubi partes eadem litera deſſignatæ partim fuerint poſitivæ, partim negativæ, ſignum minuendæ præſigendum ſit diffærentiæ, patet ex* (cor. 4. def. 23.) *Quoniam enim minuenda* M *conſtat ex ſubtrahenda* S, *&* *Differentia* D, *ſi minuenda fuerit poſitiva, erit* M = S + D, *ſi negativa, erit* M = — S — D, (k in Prol.) *Quoniam vero* S + D — S = D, *&* — S — D + S = — D (cor; 4. def. 23.) *patet reſiduo ſemper eſſe præfigendum ſignum minuendæ.*

Prob. 8. N*Umeros integros determinatos, & indeterminatos addere.*

Reſol. 1.° DAti numeri determinati, ſeu uulgares ſub ſe invincem conſcriban-

ſcribantur, ita ut articuli ejuſdem ordinis cujuſlibet numeri cadant ſub articulis ejuſdem ordinis alterius, unitates ſcilicet ſub unitatibus, decades ſub decadibus, centenæ ſub centenis &c. atque ſub ipſis ducatur recta ad diſtinguendos datos a numero infra ipſam conſcribendo, nimirum a ſumma invenienda. Collige in unam ſummam primo unitatum, inde decadum, poſtmodum centenarum columnam (1. *p. Probl.* 6) Si ſumma reſpondens columnæ unitatum decades contineat, hæ articuli ſecundi cum ſint, (*def.* 5] ad columnam ſeqnentem erunt transferendæ, in qua unitatum inſtar ſe habebunt (*cor. Prob.* 2) Similiter ad columnam centenariorum tot unitates transferendæ ſunt, quot decades contineat ſecunda columna decadum, iterum ex tertia ad quartam pro ſingulis decadibus unitates transferri debent, ex quarta ad quintam, & ſic deinceps. Singulis ergo columnis in ſummam collectis ex ſumma auferantur decades, & infra ductam rectam reſiduum ſub columna reſpectiva, notetur, vel, ſi reſiduum nullum fuerit, ejus loco ſcribatur o (*Prob.* 1.) interim decades ipſas memoria retineantur, ut innotescant unitates ad ſequentem columnam transferendæ, *d. f. q. e.* 1.

2 Polinomia (*p.* 6. *Prob.* 6.) alicui ſemper ſummæ, vel differentiæ æquivalent, adeoque, ſi eorum ſenſus internus attendatur, ſunt inſtar monomiorum. Sicuti ergo in additione monomiorum invenitur polinomium ipſis æquivalens, ita & in additione polinomiorum inveniri debet polinomium æquivalens illis monomiis, quibus polinomia data æquivalent.

valent. Polinomia ergo adduntur, si & ipsa coniungantur mediante signo + præfixo primæ cujuslibet dati polinomii parti, quæ plerumque nullo signo afficitur; si aliquod polinomium primæ suæ parti præfixum habeat signum −, tunc nullum ipsi signum præfigitur. Nam [*Sch.* 1, *def.* 23.] signum + iam præfixum est illi parti, quæ prima fuisset, nisi polinomium perturbatum fuisset, ita ut pars negativa obtineret locum primum in ipsius perturbatione. Cætera vero signa, quibus afficiuntur cæteræ dati polinomii partes mutari non debent, secus [*def.* 22: & 23.] mutaretur illud monomium, cui ipsum polinomium æquivalet; [6 *p. Prob.* 6], & summa non datis polinomiis æquivaleret, quod est contra (*def.* 12.) *e. g.* Summa polinomiorum $a + b$, $- c + d$, $f - g$, $h - i$ erit $a + b - c + d + f - g + h - i$, & summa polinomiorum $2a + 3b$, $4a - 2c$, $-b + a$, $d + bc$, erit $2a + 3b + 4a - 2c - b + a + d + bc = 7a + 2b - 2c + d + bc$ (*prob.* 7.) *d. f. q. e.* 1.

Dem. I. Sint in datorum primo unitates V, decades D, centenæ C, millenaria M &c. in secundo unitates u, decades d, centenæ c, millenaria m, erit summa V + D + C + M + u + d + c + m cu (6. *p. probl.* 6.) seu [*Sch.* 1. *def.* 23.] V + u + D + d + C + c + M + m, in qua formula unitates unitatibus, decades decadibus, centenæ centenis &c. adduntur salvo summæ totius valore. Cæterorum actuum ratio allata est in ipsa resolutione. *q. e.* 1.

2. Patet ex def. 22. *q. e.* 2.

Digitized by Google

Prob. 9. NUmerum integrum minorem ex majori ſubtrahere.

Reſol. 1. SI numeri dati fuerint determinati, minor ſub maiori ſcribatur, ita ut articuli eiuſdem ordinis in utroque ſibi invicem reſpondeant, & ſub ipſis ducatur linea recta ob rationem ſupra allatam. Procedendo a dextera verſus ſiniſtram ſubtrahe ex unitatibus minuendi unitates ſubtrahendi, (2. *p. prob.* 6.), & nota infra ipſas reſiduum, inde decades ex decadibus, poſtmodum centenas ex centenis &c., & reſidua ſcribito reſpectivis in locis. Si alicubi in numero ſubtrahendo occurrat 0, tota nota reſpondens minuendi, niſi aliqua ex mox explicandis exceptionibus obſtet, poſt ſubtractionem integra ſupererit, (*cor* 3. *def.* 23.) Si alicubi nota ſubtrahendi fuerit æqualis notæ minuendi, rurſus niſi aliud obſtet reſiduum erit 0 (*cor* 4. *def.* 23) Si nota aliqua ſubtranhendi fuerit maior nota reſpondente minuendi, nota antecedens unitate plectatur, & nota reſpondens maiori ſubtrahendæ decade augeatur (*cor prob.* 2.) Quod ſi nota antecedens unitate mulctanda fuerit 0, intelligatur in ejus locum ex alia antecedenti iam tranſlata decas, & hæc unitate plectatur *d. f. q. e.* 1.

2 Si dati numeri fuerint indeterminati, ſigna ſubtrahendi mutentur in contraria [*th.* 12.) & polinomium ex ſubtractione reſultans reducatur, ſi fieri poteſt, ad ſimpliciorem expreſſionem. Sit minuendus $2a + 3b - 4c + 8d - x + 9z$. Subtrahendus $2b + 9c - 4a + p - d$, erit reſidum $\underline{2a} + 3\underline{b} - 4c + 8\underline{d}$

$- \underline{x}$

$- x + 9 z - 2 b - 9 c, + 4 a - p + d = 6 a + b - 13 c + 9 d - x + 9 z - p$ [*prob.*] 6. *d. f. q. e.* 2.

Dem. 1. Sit minuendus V + D + C + M &c. & subtrahendus u + d + c + m &c. posita denominatione, ut in *prob.* 8 erit (6 *p. prob.* 1] residuum V + D + C + M − u − d − c, − m = V − u + D − d + C − c + M − m (*Sch. p,* 2. *def.* 23.] In qua formula salvo residuo, quod prodit subtrahendo ex toto minuendo totum subtrahendum, exprimitur subtrahi posse unitates ex unitatibus, decades ex decadibus &c. cæterorum actuum ratio allata est in ipsa resolutione.

2. Patet ex *def.* 23. & *th.* 12.

Prob. 5. *Numerum integrum per alium integrum multiplicare.*

Resol. 1. Si Numeri dati sint determinati, scribatur sub multiplicando multiplicator secundum supra allatam regulam, ducaturque sub ipsis linea recta. Dextima nota multiplicatoris ducatur in singulas multiplicandi notas a dextera versus sinistram [*p.* 4. *prob.* 5.) factum primum scribatur loco omnium dextimo sub dextima multi- plicandi nota, reliqua versus sinistram promoveantur eo ordine, quo inveniuntur, transferendo iuxta regulam in *prob.* 8 traditam ex loco dexteriore in sinisteriorem pro quacumque decade unitatem. Duc deinde eodem ordine secundam multiplicatoris notam in singulas notas multiplicandi, & facta partialia eadem regula scribito sub numero pri-

Digitized by Google

ro primo loco invento, ita tamen ut factum primum respondeat notæ secundæ numeri superioris. Eadem lege ducatur tertia nota multiplicatoris in totum multiplicandum, & factum scribatur sub numero secundo invento, prima rursus nota respondente secundæ notæ numeri superioris; & eodem modo procede in cæteris multiplicatoris notis. Si in alterutro, vel in utroque factore occurrat 1, vel 0, quale factum prodeat, monent *Corol.* 3. *&* 4. *def.* 24. Denique numeros inventos omnes in unam summam colligito, ea erit factum. *q. e.* 1.

2. Si factores fuerint polinomia indeterminata, duc singulas partes multiplicatoris in partes omnes multiplicandi (6. *p. prob.* 6.) & factis præfigito signum secundum regulam traditam in *Th.* 16). quod si literis aliqui præfigantur numeri, ij multiplicentur secundum regulam traditam in 1.*p. huius prob.*, & eorum factum præfigatur facto ex literis ipsis. Sit ducendum polinomium $a - 4c + 2d - 8e$ in polinomium $b + 3f - 5g$, erit factum $ab - 4bc + 2bd - 8be + 3af - 12cf + 6df - 24ef - 5ag + 20cg - 10dg + 40eg$.

Dem. Ut cum distinctione procedam, demonstrationem divido in duas partes, quarum in una exponam rationem, cur facta ordine exposito debeant conscribi, in altera rationem cæterorum actuum.

Factum ex prima nota multiplicatoris in primam multiplicandi erit ex factoribus simplicibus. (*probl.* 1.) adeoque unitates ipsius, quas involuit præter decades, primum a dextris locum merentur

Prob.

Digitized by Google

(*Prob.* 1) factum vero ex prima nota multiplicatoris in secundam multiplicandi est ex articulo primo in secundum (*Prob.* 1.) jamvero unitates articuli secundi decades exmprimunt, adeoque factum ex nota prima multiplicatoris in secundam multiplicandi continet tot decades, quot unitates continet prima multiplicatoris nota, uno verbo est numerus decadum, qui secundum locum meretur; simili modo ostendam factum ex prima in tertiam esse promovendum ad tertium locum, facto ex prima in quartam deberi locom quartum &c. Porro factum ex secunda multiplicatoris nota in primam multiplicandi eodem modo, quo factum ex prima multiplicatoris in secundam multiplicandi, est numerus decadum: ergo primum factum, quod invenitur ducendo secundam notam multiplicatoris in primam multiplicandi, est articulus eiusdem ordinis cum secundo facto invento, dum prima nota multiplicatoris ducebatur in multiplicandum [*Th.* 7). Simili modo ostendam secundum factum inventum in secunda multiplicatione esse homogeneum tertio inuento in prima, tertium quarto, quartum quinto &c. imo etiam primum inventum in tertia esse homogeneum secundo facto invento in secunda, secundum tertio, tertium quarto &c. quamobrem cum hæ factorum series in unam summam colligi debeant, & articuli eiusdem ordinis, seu numeri homogenei sub homogeneis scribi debeant (*Prob.* 1.) patet eo ordine singula facta conscribenda esse, quem in solutione assignavimus.

Sit multiplicaandum + V + D + C + M, & multiplicator u + d + c, erit factum (*2.p.res.hu.*) Vu

 + Dd

+ Dd + Cc + Mm + Vd + Dd + Dc + Cu + Cd + Cc + Mu + Md + Mc = Vu + Du + Cu + Mu + Vd + Dd + Cd + Md + Vc + Dc + Cc + Mc [*Sch.* 1 *def.* 23] eo in qua formula ordine, quem præſcripſimus in reſolutione, unitates multiplicatoris ducuntur in omnes articulos multiplicandi, inde decades multiplicatoris in omnes articulos multiplicandi &c. & facta ſingula in unam ſummam colliguntur. Cæteri actus rationem adnexam habent in ipſa reſolutione.

2. Ratio multiplicationis ſpecioſæ eſt in *def.* 24 *& in Th.* 16. Ad numeros præfixos quod attinet, vide reſolutionem *Pro.* 6, ubi demonſtravimus literas numeris affectas eodem modo eſſe numerandas, ſive numeratio fiat per additionem, ſive per aliam quamcumque operationem, eadem lege, qua numeri vulgares

Cor. I. SI multiplicatoris notæ ultimæ ſint o, acta ex o in multiplicandi notas ſive ſignificatiuæ ſint, ſive non, erunt o (*cor.* 6. *def.* 24.) unde tot prodibunt ſeries cyphrarum o, quot cyphras habet in fine multiplicator, (1. *p. reſol. hujus*] & dextima cyphra primæ ſeriej dextimum locum in ſumma, dextima ſecundæ ſecundum locum, dextima tertiæ tertium locum in ſumma, & ſic deinceps occupabit, ac proinde tot loca dextima occupabuntur a cyphris, ſeu o quot o ſunt in fine multiplicatoris. Si igitur multiplicator cyphris aliquot terminetur ſufficiet antecedentes multiplicatoris notas ſignificativas ducere in multiplicandum, & ſummæ factorum ſic inver-

Digitized by Google

inventorum adjicere tot cyphras, ſeu o, ad dexteram, quot ſunt hujuſmodi cyphræ, ſeu o, in fine multiplicatoris.

Cor. 2. QUod ſi etiam multiplicandus terminetur cyphris, ſeu o, dum primam notam ſignificativam multiplicatoris duces in ſingulas mulptcandi, tot facta prius reperies æqualia o, quot erunt cyphræ in fine multiplicandi, (*cor.* 5. *def.* 24.) adeoque factum ex notis ſignificativis multiplicatoris in multiplicandum tot cyphris, ſeu o terminabitur, quot cyphræ ſeu o terminant multiplicandum. Cui facto cum (*cor.* 1.) ſint præterea adjiciendæ tot aliæ cyphræ, ſeu o, quot ſunt in fine multiplicatoris. ergo ſi factor uterque cyphris terminetur, factum habetur, ſi notæ ante ipſas in utroque multiplicentur, & facto earumdem adijciantur ad dexteram cyphræ factorem utrumque terminantes.

Cor. 3. QUod ſi occurrant cyphræ ſeu o inter notas ſignificativas multiplicatoris, ubi ad earum primam perveneris, orietur cyphrarum ſeries, quarum dextima terminabitur ſub ſecunda nota numeri ſuperioris, &, ubi ſecundam multiplicaveris, orietur alia, cuius nota dextima terminabitur ſub cyphra ſecunda ſeriei antecedentis, idemque continget, ſi aliæ adhuc fuerint in multiplicatore cyphræ, atque ubi poſt ipſas veneris ad ſequentem notam ſignificativam multiplicatoris, primum factum ex ipſa in primam multiplicandi notam ſcribendum erit ſub ſecunda cyphra, ſeu o, ultimæ ſeriei (*ex reſ.* 1. *probl. hujus*] Quoniam igitur hujuſmodi cyphræ, ut ſcribantur

bantur omnes; necesse non est, nisi quatenus notas significativas promovent ad sinistram [*Th.* 3.] si in multiplicatore occurrant cyhpræ, seu o inter ejus notas significativas, multiplicatio peragi poterit perinde ac si eæ non haberentur, dummodo factum ex prima nota post ipsas cyphras non per unicum locum ad sinistram promoveatur, sed per tot adhuc loca, quot cyphræ ad dexteram illam notam præcedunt.

Sic factum ex 20 in 4 = 80 [*cor.* 1.] ex 20 in 40 = 800 (*cor.* 2.)
& (*cor.* 3.) factum ex 44 in 203 =

```
  44
 203
----
 132
88
----
8932
```

ubi quidem vides factum ex secunda multiplicatoris nota in multiplicandum, seriem scilicet cyphrarum, quæ mediaret inter 132, & 88, omitti; quia tamen hæc series locum sibi vindicaret sub 3. primum, sub 1. secundum, factum 88. primum sub 1. locum habere debet. Atque hæc quidem numericæ multiplicationis compendium respiciunt; compendium speciosæ docet ex Leibnitio sequens.

Sch. I*N multiplicatione literali non exiguum etiam calculis commodum affert sæpe sola multiplicationis indicatio, factoribus polimoniis intra parentheses inclusis. Sic factum ex* a + b + c + 2 d *in* c + 3 d − f *indicatur per* (a + b + c + 2 d) (c + 3 d − f).

Prob. 11.

Cor. 4. FActum ex $a + b$ in $a + b$, seu (*def.* 26) $[a + b]^2 = a^2 + 2ab + b^2$ [*prob. praec.*) igitur quadratum binomij æquatur summæ quadratorum partium, & bis facto ex una parte in aliam. Similiter factum $a + b + c$ in $a + b + c = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$ seu secunda dignitas trinomii æquatur quadratis partium, & duplis factis partium singularum in singulas. Idem patet in quadrinomijs, quintinomis, & polinomiis quibuslibet.

Cor. 5. FActum ex $(a + b)^2$ in $[a + b]$ seu (*def.* 26.) $[a + b]^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (*Prob. praec.* & *cor. praec.*) igitur cubus binonij æquatur cubis partium, & triplo factorum ex una qualibet parte in quadratum alterius. Similiter $[a + b + c]^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + 6abc + c^3$; scilicet cubus trinomii æquatur cubis omnium partium, & triplo factorum ex parte qualibet in quadrata reliquarum, cum bis triplo facti omnium partium.

Prob. II. *NUmerum integrum compositum* I. *per simplicem*, 2. *per compositum dividere.*

Resol. I. DIvisor simplex ad sinstiram scribatur, ipsique ad dexteram constituatur dividendus, ducta inter ipsos recta, ut secernantur Prima nota divisoris applicetur primæ dividendi (*Prob.* 6) & quotus sub illa notetur, vel id si fieri nequeat, per divisorem dividatur numerus compositus ex prima, & secunda nota, quotusque notetur sub secunda nota, inde

inde dividatur tertia nota, quotus ſub tertia ſcribatur, atque ita deinceps. Quodſi occurrat diviſorem in aliqua nota non contineri ſcribatur o, ſi aliqua quoti nota iam præcedat, ſecus loco o ſubſtituuntur duæ lineolæ paralellæ, & diviſor ipſe applicatur numero compoſito ex pærdicta nota, & ſequente dividendi. Si quod occurit in diviſione reſiduum, quoniam unitates in loco ſiniſtro ſunt decades in dextero, notæ ſequenti tot decades adjicies, quot ſunt unitates reſiduæ: quod si hoc reſiduum habeatur in fine diviſionis, ipſum erit numerator fractionis quoto adiungendæ, ut accuratus ſit, eiuſque denominator erit diviſor. (5. *p. Prob.* 6.)

2 Scribantur dividendus, & diviſor ut ſupra ſed ſubtus diviſorem agatur recta, ut ſub ipſa quotus diſtinctim à diviſore notari poſit. Ex dividendo ſecernantur tot notæ ſiniſtimæ, quot notas habet diviſor, earumque dextima puncto, aut ſigno alio quocumque notetur, si eæ notæ efficiant numerum diviſore majorem, ſed si componant numerum diviſore minorem, notetur puncto nota ſequens dividendi. Dividatur in primo caſu prima nota dividendi, per primam diviſoris, ſecunda per ſecundam, tertia per tertiam &c. tranferendo, ut ſupra, ad ſequentem notam decades pro unitatibus reſiduis in nota antecedente, & si quoti poſteriores ſint primo æquales, vel primo maiores, primus ipſe notetur ad ſiniſtram ſub diviſore, si eorum aliquis fuerit primo minor, primus ipſe unitate imminuatur, & quidem tamdiu, quamdiu poſteriores omnes evadant primo æquales, vel maiores, ſcribatur in primo loco ſubtus rectam ſub diviſore ductam,

ctam quotus hic, & quotus hic inventus ducatur in divisorem, & factum subtrahatur ex notis resectis dividendi. Residui ad dexteram appone notam sequentem dividentis, &, qui inde prodit numerus, dividatur, ut supra, quotusque notetur ad dexteram primi quoti. Residuo in hac secunda divisione invento iunge ad dexteram sequentem aliam dividendi notam, &, operatio repetatur usque ad ultimam notam dividendi; si contingat divisorem esse majorem numero, composito, ex residuo, & nota respectiva dividendi, loco quoti scribatur o, & huic numero, qui erit residuum respectu o, apponatur ad dexteram sequens dividendi nota; in casu secundo dividendus est numerus compositus ex duabus primis dividendi notis per primam notam divisoris, tertia nota illius per secundam huius, & ita porro, cetera prorsus fiunt ut in casu primo *q. e. 2. f.*

3. Si Polinomium per monomium sit dividendum quærantur in dividendo partes, quas tamquam factor divisor ingreditur, & singularum divisio fiat ut in *Prob*, 6; reliqæ partes intra parentheses claudantur, & inter ipsas, & divisorem interjiciatur signum divisoris, nisi velis divisorem ad modum fractionis indicare.

4. Si denique polinomium per polinomium sit dividendum, divisio fit fere ut in numeris uulgaribus, nimirum per partem quamlibet divisoris dividitur pars quæcumque dividendi, ut fit in divisione simplici, quotoque ducto in divsiorem factum ex dividendo subducitur, ac deinde in residuo eodem modo repetitur divisio, donec in residuo nihil supersit per notam quamlibet divisoris divisibile:

atque

atque ultimo residuo, nisi sit o, subscribitur divisor ad instar denominatoris: Cum arbitrarius sit ordo, quo polinomii partes conscribuntur (*Sch. def.* 23.) ab arbritrio etiam nostro pendet divisionis principium sumere a quacumque divisoris, & dividendi parte, imo in potestate etiam dividentis est modo unam, modo aliam divisoris partem assumere pro divisore, cum id non quoti valorem, sed tantum ordinem partium ipsius perturbet; quodsi in dividendo non occurrant literæ, quæ habentur in divisore, divisio indicatur intra parentheses clauso divisore, & dividendo, & interiecto inter ipsos signo divisionis, quod nonnumquam fit, etiam quando divisio actu fieri potest, at in calculi progressu deprehenditur non neccessaria.

Dem. 1.° Sint in dividendo millenaria M centenæ C, decades D, unitates V; in divisore unitates u erit quotus $= \frac{M + C + D + V}{u}$ $= \frac{M}{u} + \frac{C}{u} + \frac{D}{u} + \frac{V}{u}$ (*6. p. Prol.* 3.) Quod si quotus $\frac{M}{u}$ in integris sit *a*, sed justo minor, sitque residuum R, erit quotus accuratus $= a + \frac{R}{u} + \frac{C}{u} + \frac{D}{u} + \frac{V}{u}$. Cum autem R referatur ad articulum superiorem (*hyp.*] cujus unitates sunt decades articuli inferioris, saluo suo valore pro vnitatibus R transferri possunt totidem decades ad C, atque inde loco dividendi simpliciter C, dividi potest simul R + C. Idem ostenditur, si etiam hic habeatur aliquod residuum S &c. adeoque &c. Quod autem quoti

notæ

notæ ſint articuli ejus ordinis, cujus eſt nota dividendi ipſi reſpondens, ita patet. Quoniam dividendum ſe habet ut factum, diviſor, & quotus ut factores. (2. *p. Th.* 17.), & nota quælibet dividendi habet in ſe valorem, quem habet numerus compoſitus ex ipſa nota, & tot cyphris, quot notæ ipſi ad dexteram jacent (*Th.* 3. *&* 4.), ergo etiam factorum alteruter totidem cyphras ad dexteram exigit pro ſuo integro valore [*cor. prob.* 10.] cum igitur diviſor ſit ſimplex (*hyp.*), ergo eæ cyphræ intelligendæ ſunt conſtituendæ ad dexteram quoti. Quod cum obtineatur promovendo quotum ad locum ſub nota reſpondente dividendi, patet propoſitum.

2. Secunda diviſio quamvis videatur diverſa a prima, tamen intimius perſpecta cum illa penitus coincidit. 1. In prima quidem non fit multiplicatio, & ſubtractio præſcripta in ſecunda, quia reſiduum vel immediate ex Tabula Pythagorica, vel etiam ex multiplicatione memoriter peracta innoteſcit; cæterum reſiduum utrobique quæritur cum hoc unico deſcrimine, quod in prima facilius, quam in ſecunda invenitur. 2. Quotus in prima ſcribitur ſub dividendo, non item in ſecunda, quia hic ſub dividendo ſcribitur reſiduum, ſed illic memoria retinetur. Cæterum tum hic, tum illic promovetur ad ſiniſtram eadem penitus lege, ut poſt notam quamlibet quoti tot adhuc ſcribantur, quot ſuperſunt in dividendo notæ. Nova ergo demonſtratione hujus ſecundæ reſolutionis opus non eſt.

3 & 4 immediate fluunt ex *def.* 25. & 6. *p. Prob.* 6.

Cor. 1.

Digitized by Google

Cor. I. SI diviſorem & dividendum terminent cyphræ, ſeu o, & omnes diviſoris cyphræ deleantur, ſimulque totidem a dextera verſus ſiniſtram in dividendo, utriuſque articuli per æquales gradus deſcendere intelligentur (*th.* 3. 4.) ſeu numeri reſidui erunt totidem vicibus ſubdecupli diviſoris, & dividendi reſpective [*cor. prob.* 2.) igitur ſi numerus, qui remanet ablatis cyphris ex dividendo, dividatur per eum, qui remanet deletis cyphris in diviſore, quotus manebit idem (*cor. th.* 8.) ſic 10000000 diviſum per 5000000, = 10 : 5 : = 2, & 11000 : 5000 = 11 5 : = 2 $\frac{1}{5}$

Cor. 2. QUodſi dividendum cyphris non terminetur, vel ſi terminetur paucioribus, quam diviſor, tamen loco tot notarum ultimarum dividendi, quot ſunt cyphræ in fine diviſoris licebit ſubſtituere totidem cyphras ſalvo valore notarum antecedentium (*th.* 3. *cor.* 4.) & numero inde prodeunti adijcere notas a cyphris excluſas, ut ſaluus maneat valor totius. Sic hic numerus 34514968 = 34514000 + 968 = 34500000 + 14968 &c. ſi igitur ex dividendo tot notæ reſecentur, quot ſunt cyphræ in fine diviſoris, notæ reſiduæ dividendi dividi poterunt per reſiduas diviſoris, ut in *cor.* 1. ſalvo quoti valore, & ſupererit numerus ſub ſigno + adiectus per totum diviſorem dividendus, ſic ſi dividi debeat numerus 46234 per 200, habebis, 46200 : 200 + 34 : 200 = 462 : 2 + 34 :

200

Digitized by Google

200 = 231 + $\frac{34}{200}$ Compendij igitur gratia, Si in divisoris fine occurrant cyphræ, totidem notis ultimis dividendi subscribitur totus divisor, atque huiusmodi fractio adijcitur quoto emergenti ex divisione notarum residuarum dividendi per divisorem sublatis dictis cyphris.

Sch. *SI in divisione actuali aliquid supersit, hoc residuum denominabitur a suo divisore, a divisore nempe dato a cyphris expurgato, inde in hoc casu duæ diversæ emergunt fractiones, altera ex divisione actuali, & huius denominator est divisor sine cyphris, altera ex notis a dividendo resectis, cuius denominator est divisor cum suis cyphris. Sic si dividatur* 43528 *per* 8200, *quotus erit* 5 + $\frac{25}{82}$ + $\frac{28}{8200}$ *quæ quomodo in unam reducantur, ostendetur in cor. sequenti.*

Cor 3. SI divisori, & dividendo totidem ad dexteram cyphræ adijciantur, per æquales gradus eorum articuli ascendere intelligentur [*th.* 3. & 4] adeoque valor quoti manebit idem (*cor.* 6. *th.* 17.) ; si ergo numeratori, & denominatori fractionis adiiciantur totidem cyphræ, ea manebit eiusdem valoris [*sch.* 1. *def.* 25.], hinc prima fractio ex supradictis in *sch. præced* mutatur in aliam eiusdem denominatoris cum secunda, si denominatori restituantur cyphræ a divisore ablatæ, & totidem numeratori, & cum locum harum cyphrarum obtinere possint notæ numeratoris secundæ fractionis (*th.* 3.

& 4) quem obtinebant ante divisionem, utraque fractio reducitur in unam, si post notas numeratoris primæ scribantur notæ numeratoris secundæ, iisque subscribatur integer divisor. Sic superiores fractiones $\frac{25}{82} + \frac{28}{8200}$ reducuntur in $\frac{2528}{8200}$.

Prob. 12. E*Xaminare singulas Arithmeticæ operationes.*

Resol. 1. A*Ccurata est summa*, si ex summa subtrahatur datorum unus, ex residuo datorum alter, ex residuo secundo iterum alter usque ad ultimum, quo subtracto nihil remaneat.

2. *Residuum*, si subtrahendæ addatur residuum, & summa minuendam adæquet.

3. *Factum*, si ipso diviso per factorum alterutrum, quotus emergens sit factor alter.

4. *Quotus*, si ipso ducto in divisorem, factum una cum residuo (si adfuerit) dividendum adæquet.

Dem. I. MAius continet minus, & differentiam, (*k in prol.*) igitur summa continet datorum primum, & residuum, & residuum primum continet datorum secundum cum residuo secundo, adeoque summa primum, & secundum datum cum secundo residuo continet. Porro hoc residuum ob eandem rationem continet tertium datum, & residuum, adeoque, si loco secundi residui substituatur tertium cum tertio dato, summa continebit primos tres datos cum tertio residuo, eodem modo procedendo ostendam continere datos re-

tos reliquos uſque ad ultimum cum ultimo reſiduum. Ergo, ſi reſiduum ultimum fuerit o, præter datos omnes ſumma nihil ulterius continebit, ſed ipſis præciſe æquabitur, adeoque [*def.* 22) erit vera, & accurata ſumma.

2ª *pars Patet ex k in prol. & def.* 23.

3ª & 4ª *pars manifeſtæ ſunt ex th.* 17.

Sch. I. *PEr demonſtrationem evincitur intentum obtineri per actus in reſolutione præſcriptos, modo ipſi rite executioni mandentur; per examen autem numerus inventus comparatur cum conditionibus, quas habere ipſum debere aliunde, puta ex præcognitis aliis principiis, vel ex natura propſiti quæſiti manifeſtum eſt, quæ ſi ſalvæ maneant, ipſum propoſito ſatiſfacere iudicatur, atque hinc in operatione actus rite exercitos fuiſſe; ſin minus, errorem in executione actuum reſolutionis eſſe admiſſum infertur: ex quibus facile deduces differentiam inter examen, & demonſtrationem.*

Sch. 2. *MIrabimini fortaſſe, quod cum reliquis Arithmeticis examina per* 9, *&* 7 *non adhibuerim. Sed ea hic exponam breviter, & ex eorum natura rationem deducam, cur præcipuum in ſolutione problematis locum ipſis non dederim.* 1. *ergo additionem examinant ſubducendo ex ſingulis datis* 9, *vel* 7 *notantes reſiduum poſt ſubtractionem abſolutam; & ſubducendo dein* 9, *vel* 7 *ex ſumma, notandoque rurſus reſiduum, quod ſi cum primo reſpective identificetur, inferunt additionis rectitudinem, ſin minus eiuſdem falſitatem. Dum porro ſubducunt novena-*

rium loci notarum rationem non habent, ſed eas ſpectant, ut articulos primos, ſed dum ſubducunt ſeptenarium notam ſiniſteriorem, ut articulum ſecundum, dexteriorem ut primum ſemper ſumunt, quemcumque tandem occupent locum. Sic in numero 875, *dum ſubducitur* 9 *ex* 87, *ſummantur ipſæ notæ, & ex ſumma* 15 *ſubducitur* 9 *manente reſiduo* 6, *quod cum* 5 *nota ſequente efficit* 65. *quarum notarum ſumma eſt* 11, *de qua ſubducto* 9, *remanet* 2. *At dum ſubducitur* 7 *diverſa proceditur ratione.* 1 *quæ remanet, ſubducto* 7 *ex* 8, *conſideratur ut* 10, *qui cum ſequente nota* 7 *efficit* 17, *ex quo ſubducto* 7 *remanet* 3, *qui cum* 5 *efficit* 35, *& ſubducto* 7 *remanet* 0. *Antequam ulterius progredior, obſervo errorem nobis poſſe excidere in ipſo etiam examine faciendo: ab hoc quidem periculo immune non eſt examen noſtrum additionis, ſed examina* 9, *&* 7 *tanto ei obnoxia magis ſunt, quanto operatio, quæ in his, præſertim in ſecundo præſcribitur, aſperior eſt ſimplici ſubtractione, & licet verum ſit ex proprietate* 9 *idem reſiduum haberi, ſive notæ ſpectentur ad inſtar ſimplicium numerorum, ſive ut articuli eius ordinis, qui convenit eorum locis, reſiduum idem haberi in eductione* 7 *licet etiam verum ſit; ſi exacte, & caute ineantur huiuſmodi examina, nondum tamen tutus es de ſummæ rectitudine. Si enim notas omnes ſummæ contrario modo ſcribas, vel earum ordinem perturbes, vel ad dexteram, vel in medio quotcumque adjicias, vel deleas cyphras, ſeu* 0, *certe numerus inde diverſus prodibit* (prob 1.), *& tamen examen novenarij eodem modo procedet,*

procedet, ac ante huiusmodi perturbationem, vel cyphrarum adiectionem, proinde examen errorem minime manifestabit. Nec desunt casus in quibus 7 eductio errorem haud detegit; ut unum vel alterum afferam captu facillimum, finge alicubi subducto 7 nihil remanere, inter notam ex qua subductio facta est, & sequentem interijce quotuis 7, vel quamtumvis 7 multiplum, vel quotuis 0, examen eodem modo procedet, ac ante interiectionem: ad sinistram summæ adijce quotuis 7, vel ejus multiplos, idem continget. Igitur huiusmodi examina etiam recte inita tuta non sunt, quo defectu nostrum minime laborat. Præterea horum examinum demonstratio ardua, atque operosa admodum. Neque enim satis est innuere eam pendere ex axi: 3. lib. 1. Eucl: Nam licet 9, vel 7, qui subducitur ex datis sit æqualis 9, vel 7 subducto ex summa, nondum tamen certum est, an utrimque, subducta fuerint æqualia: vestrum quilibet rogaret an totidem vicibus 9, vel 7 fuerint utrinqne subducti, præsertim cum apparenter totidem vicibus utrinque subtrahi non videantur, sed potius pluries ex datis, quam ex summa. Certe si sufficiens signum est æqualitatis duorum, quod subductis æqualibus ex ipsis remanent æqualia, nec opus est, ut ea subtrahantur totidem vicibus, etiam 1 = 1, & subducta 1 ex inæqualibus quantumcumque numeris, semper remanet 0, quod indicio erit numeros quantumlibet inæquales æquari, quod est absurdum. Sed defectum hunc huius demonstrationis supplet ex aliqua parte Wolfius, examen ipsum paulisper immutans. Notat nempe

quot unitates ex columna qualibet in sequentem translatæ sint, easque (recte quidem, siquidem pro quacumque decade scribens unitatem numerum 9 omittis) considerat, ut novenarios inter summandum omissos iisque adnumerat numerum novenariorum, a summa reiectorum, cui si æquatur numerus eorumdem reiectorum ex summa, & residuum sit idem, infert veram esse summam. Quæ quidem operatio videtur ita per allatum principium demonstrari posse, ut nostræ exceptioni non sit locus. Sed si intimius rem scrutemini, ea viget adhuc. In hoc enim examine totidem rejectos utrinque novenarios fuisse non constat. Neque enim tot omittuntur novenarii inter summandum, quot unitates adnumerantur columnis ad sinistram, sed id verum est tantummodo in columna dextima, & in subsequentibus omittuntur potius toties decem, centum, mille &c. novenarii. Si ergo ipsum Wolfianum examen perficere volveris, vides quam operosam, & periculosam magis operationem semper requirat. Iisdem penitus difficultatibus obnoxium est examen 7, & alijs adhuc majoribus, quas ne longior sim, omitto. Quamobrem ijs merito nostrum antefertur. Alijs adhuc diversis modis efficiunt arithmetici datorum subtractionem, quos hic recensere omnes superfluum puto.

Cæteras etiam operationes per subductionem 9, & 7 examinant, subtractionem, educendo 1. ex subtrahendo, & residuo, secundo ex minuendo, 9, vel 7, & observando an idem habeatur residuum, nec ne: multiplicationem demendo. 1. ex multiplicando 2. ex multiplicante 3. ex facto residui

residui primi in secundum, 4., ex ipso facto 9, vel 7, & observando an in 3. & 4. eductione idem remaneat, nec ne. Divisionem demendo 1. ex divisore. 2. ex qutoto, 3. ex facto residui primi in secundum, 4. ex dividendo 9, uel 7, & observando an in 3. & 4. subductione idem remaneat. Ad subtractionem quod attinet, ejus examen coincidit cum examine additionis, ita ut minuendus numerus spectetur ad instar summæ, subtrahendus, & differentia ad instar datorum, proindeque de hoc examine eadem redeunt affirmanda, quæ de examine summæ. Quod vero spectat ad reliquas operationes rem tentanti apparebit præter supradicta in examine summæ errandi pericula, nova adhuc occurrere, & difficultatem supra allatam contra demonstrationem examinis summæ vigere melius in demonstratione istorum. Quæ cum ita sint, merito huiusmodi examinum methodis in prob. locum denegavimus.

Sch. 3. *INter operationes Arithmetiæ recensetur etiam radicum extractio, quæ quidem ab hactenus expositis diversa non est, sed potius ipsarum complexus. Eam hic exponemus, sed ultra tertiam potentiam non progrediemur, superioribus locum in Arith. sublimiori relinquentes, in qua canonem describemus, extractioni radicum omnium, & elevationi ad potentias quaslibet sive determinatas, sive indeterminatas describemus. Elevatio numeri ad secundam, vel tertiam, imo & ad aliam quamlibet, in ipsa definitione 26. describitur, & per regulas in* probl. 10. *traditas facile percipitur; ut proinde distincto problemate pro eadem hic opus non sit. Ad extractio-*

tractionem vero secundæ, & tertiæ radicis accedere non possum, nisi paucis prænotatis, quorum neglectus in causa est, ut a demonstrationibus horum problematum ipsius Wolfii, qui de rigore geometrico adeo se præbet ubique sollicitum, animo plene convicto, & illustrato non discedas. Mens erat quidem mihi hæc prossequi nova theoria (quemadmodum ob similem causam feci in characteristica numerorum) sed melius, opinor, mentes subibunt, si soluta proponantur, ut in sequenti.

Cor. Gen. A. Ex *Probl.* 1. numerus constans duabus notis solvi potest in binomium, cujus prima pars sit prima nota cum una 0, & nota secunda sit pars altera. Sic 24 = 20 + 4. Compositus ex tribus in trinomium, cujus pars prima sit nota prima cum duabus 00, pars altera nota secunda cum una 0, pars ultima nota tertia. Sic 235 = 200 + 30 + 5. Compositus ex quatuor notis in quadrinomium &c.

B. Quadratum primæ partis binomii hujusmodi est numerus compositus ex quadrato partis significativæ, quæ (A) simplex numerus est, cum duabus ad dexteram 00 [*cor.* 2. *probl.* 10.] proindeque, cum illud quadratum notæ significativæ duabus ad summum notis constare possit, & ad minimum una, totum quadratum primæ, partis (*cor.* 2 *probl.* 10.) quatuor ad summum notis constabit, tribus ad minimum, & quadratum notæ significativæ terminabitur in loco antepenultimo. Observa quadratum 50, quod est 2500, vel aliud quodlibet, & hæc omnia palpabis.

C. Prima binomii pars ad summum esse potest

test 90 [A], cujus duplum 180 ad summum potest esse numerus trium notarum, quarum ultima necessario est 0 (*cor.* 1. *probl.* 10.) notæ vero ipsam præcedentes exprimunt duplum notæ significativæ primæ partis binomii, adeoque factum ex secunda binomii parte in duplum notæ significativæ primæ partis binomii terminatur in penultimo loco. Porro binomium omnium maximum (A) est 90 + 9, in quo quadratum primæ partis est 8100, & bis factum ex secunda in primam est 1620, quadratum vero partis secundæ 81; quorum summa 9801 quatuor tantum notis constabit, ut proinde verendum non sit, ne ullius binomii quadratum pluribus, quam quatuor notis, constet.

D. Similiter quadratum notæ significativæ primæ partis trinomii quatuor post se notas habebit, seu quatuor locis a dextera ad sinistram promovebitur, bis factum ex secunda in primam terminabitur in tertio ante notam ultimam loco, quadratum notæ significativæ secundæ partis in secundo ante ultimum loco, factum ex tertia trinomii parte in duplum notæ significativæ primæ partis in eodem secundo ante ultimum loco, factum ex tertia parte in notam significativam secundæ partis in loco penultimo, quadratum tertiæ in ultimo, & totius trinomii quadratum sex ad summum notis constabit. Quæ omnia manifestissima evadent recolenti principia citata in B, & C; imo ex iisdem facile tu ipse deduces, ubi nam terminentur facta partialia in quadrinomio, quinitinomio, & polinomio quocumque.

E. Ex iisdem etiam intelliges cubum binomii

sex ad

ſex ad ſummum notis conſtare, cubum notæ ſignificativæ primæ partis terminari in tertio ante notam ultimam loco, triplum facti ex quadrato notæ ſignificativæ primæ partis in ſecundam terminari in ſecundo, triplum facti ex quadrato ſecundæ in notam ſignificativam primæ in primo ante ultimam loco, & cubum ſecundæ in ipſo ultimo loco terminari. Ex jiſdem facile agnoſces, quibus in locis terminentur facta partialia componentia cubum trinomii, quadrinomii, & polinomii cuiuſcumque.

F. Igitur in quadrato binomii duabus ad dexteram reſectis notis, certus eris in proxima ad ſiniſtram nota terminari quadratum notæ ſignificativæ primæ partis, in quadrato trimonij, quatuor reſectis, in quadrato quadrinomii reſectis ſex, & ſic deinceps. Præterea ſi ex quatuor reſectis in quadrato trinomii duæ iterum reſecentur, certus eris in nota ante has bis factum ex nota ſignificativa ſecundæ partis in ſignificativam primæ, & quadratum notæ ſignificativæ ſecundæ partis terminari; atque ita ſex illæ notæ reſectæ in quadrato quadrinomii ob eandem rationem in tres claſſes duarum notarum dividentur, & ita porro; ex B, C, & D.

G. In cubo autem binomii tres ad dexteram notæ ob eandem rationem ſecandæ ſunt, ſex in cubo trinomii in duas claſſes trium dividendæ, in cubo quadrinomii novem dividendæ in tres claſſes trium, & ſic porro; ex E.

H. Numerus ergo omnis radicem habet ſecundam, aut tertiam tot notis conſtantem, quot continet periodos diviſus juxta F, aut G; quarum prima in diviſione juxta F poteſt quidem paucio-

res,

Digitized by Google

ciores, ſed non plures continere notas, quam duas, in diviſione vero iuxta G pauciores, ſed non plures, quam tres ex C, D, & E.

I. Ut cæteræ operationes, ita extractio radicum fieri nequit, niſi, qua ratione in numeris ſimplicibus ea fiat, prius innoteſcat. Qamobrem Tabulam ſequentem conſtruimus. Conſtrue rectangulum A B C D, cuius latus A B divide in 9. partes, & latus A D in 3; ductiſque per puncta diviſionum rectis ſcribe in ſerie quadratulorum A B numeros ſimplices, in quadratulo infra 1. ſcribe factum ex 1. 1.; in quadratulo infra 2 factum ex 2. 2 &c. in infimo quadratulo ſub 1. factum ex 1. 1. ſub 2 factum ex 4. 2. &c. quæ facta per prob. 10 invenies. *Ex def.* 26 in ſecunda ſerie habebis quadrata numerorum in fronte Tabulæ, & in tertia cubos eorundem.

A B

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	8	27	64	125	216	343	512	729

D C

K. Factum ex multiplicatore quolibet in quodlibet multiplicandum conſiderari poteſt ut ſumma fa-

ma factorum ex multiplicatore in ultimam notam multiplicandi, & ex multiplicatore in reliquas notas, ita tamen, ut unitates huius addantur decadibus illius, decades centenis &c. Patet ex *prob.* 10. demonstratione. Sic 55. 5 = 25 + 250, in quibus addendis adinvenies notas secundi facti ex 5. 5 ita addi notis primi, ut unitates secundi respondeant decadibus primi &c.

Prob. 13. EX *numero quolibet radicem quadratam extrahere*

Resol. 1. NUmerum propositum divide in periodos duarum notarum (*K in cor gen.*) procedendo a dextera versus sinistram. 2. Quæratur in tabula radix secunda primi membri: eaque post lunulam scribatur ad sinistram numeri dati, atque hæc erit prima nota radicis quæsitæ. Quodsi in tabula non reperias præcise numerum primi membri, sume in ea radicem numeri proxime minoris. Radicis huius quadratum subtrahatur ex primo membro. 3. Numerus compositus ex residuo, & nota prima secundæ periodi dividatur per duplum radicis inventæ, & quotus scribatur post lunulam ad dexteram primæ notæ, & multiplicetur per numerum compositum ex divisore, & ipso, factumque subtrahatur a numero composito ex primo residuo, & tota secunda periodo. Quodsi factum fuerit dicto minuendo maius, quotus unitate tandiu mulctetur, donec idem factum evadat minuendo minus. Per duplum totius radicis inventæ iterum dividatur numerus compositus ex residuo secundo, & prima nota classis

tertiæ,

Digitized by Google

tertiæ, & operatio *num.* 3. prorſus eadem iteretur uſque ad claſſem ultimam *d. f*.

Sit *v. g.* educenda radix ſecunda ex numero 9916201. Ecce tibi calculi typum.

3149) 9,91,62,01
61) 61
30 ——— 1
624) 3062
4) 2496
566
6289) 5660,1
9) 56601
00000

Dem. EX H *in cor: gen.* radix quæſita eſt polinomium tot partibus conſtans, quot ſunt periodi numeri propoſiti, & in ultima nota ſinitimæ periodi ex F *in cor: cit.* terminatur quadratum notæ ſignificativæ primæ partis huius polinomji: ergo ſi ex tabula ſumatur jllius quadrati radix ſecunda, hic numerus erit nota ſignificativa primæ partis, & huic intelligentur adhærere tot ad dexteram cyphræ, quot ſuperſunt in numero propoſito periodi; ſic in noſtro caſu radix erit quadrinomia, quadratum notæ ſignificativæ terminabitur in 9, ejus radix erit 3, & huius 3. erit valor 3000. ex A *in cor. cit.* in prima nota claſſis ſequentis terminatur factum ex duplo notæ primæ ſignificativæ in ſecundam, quod factum proinde continetur in numero compoſito ex reſiduo claſ-

ſis

Digitized by Google

ſis primæ, ſubducto ex ea quadrato primæ partis, & nota prima claſſis ſecundæ. Ergo ſi hic numerus dividatur per duplum notæ primæ, quotus (*p.* 1. *th* 17.] erit nota ſecunda, cui *ex A in cor. cit.* intelligentur adhærere tot 0, quot remanent in numero propoſito periodi; ſic in noſtro exemplo, in quo nullum eſt ex prima claſſe reſiduum, in ſecundo 9 terminabitur factum ex duplo primæ notæ 3 in ſecundam, quæ facta diviſione invenietur eſſe 1. cuius valor erit 100. porro in ſecunda nota claſſis ſecundæ (*F in cor. cit.*) terminatur quadratum notæ ſignificativæ ſecundæ partis, adeoque in numero compoſito ex reſiduo primæ claſſis, & claſſe ſecunda continetur factum ex ſecunda nota in ſe ipſam, & ex ſecunda in duplum primæ, ſeu ex *K in cor. cit.* factum ex ſecunda nota in numerum compoſitum ex duplo primæ, & ſecunda, *v. g.* in noſtro caſu factum ex 1. in 61. Subtracto igitur hoc facto ex dicto numero compoſito; in numero compoſito ex reſiduo mox invento, & nota prima claſſis tertiæ continebitur factum ex duplo tum primæ, tum ſecundæ notæ in tertiam, ſeu factum ex duplo numeri compoſiti ex prima, & ſecunda nota in tertiam ex *K. in cor. cit.* quæ proinde ut inveniatur, debet iterum fieri diviſio, ut in reſolutione præcipitur [*p.* 1. *th*: 17.) ſimili modo oſtendam iuxta ea, quæ fiunt in reſolutione inueniri quartam, quintam &c. radicis notam. Porro 3000 + 100 + 40 + 9 ex A *in cor. cit.* = 9149. Itaque omiſſis 0, quæ poſt notas ſubintelliguntur, nume-

numerus compositus ex notis inventis eo ordine, quo inveniuntur, æquatur polinomio, quod si in se ipsum duceretur, produceret numerum æqualem proposito (*cor.* 4. *prob.* 10.) Est ergo ille numerus radix secunda (*def.* 26.) numeri propositi *q. e. d.*

Sch. EXtractio radicis secundæ ex polinomio literali eadem omnino regula fit, ac extractio ex polinomio numerico, nisi quod multiplicationes, divisiones, cæteræque operationes hic sunt speciosæ, ibi vulgares. Sic* $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2}$ *est* $a + b + c$. *En typum calculi*

$$
\begin{array}{lll}
a+b+c) & & a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \\
 & & a^2 \\
\hline
2a+b) & b & 0 + 2ab + b^2 \\
 & & 2ab + b^2 \\
\hline
2a+2b+c) & c & 0 + 2ac + 2bc + c^2 \\
 & & 2ac + 2bc + c^2 \\
\hline
 & & 0
\end{array}
$$

Prob. 14. *EX numero quolibet composito radicem cubicam extrahere.*

Resol. 1. NUmerus datus a dextera versus sinistram procedendo dividatur in classes trium notarum. 2. Sumatur ex tabula radix tertia primæ classis, aut numeri proxime minoris numero primæ classis; quæ radix erit prima nota significativa radicis quæsitæ, ejusque

que cubus ſubtrahatur ex ipſa prima claſſe. 2. Numerus compoſitus ex reſiduo mox invento, & nota prima claſſis ſequentis dividatur per triplum quadrati notæ inventæ, & quotus erit nota ſecunda radicis quæſitæ. Ducatur hic quotus in diviſorem, inde triplum quadrati hujus quoti in primam notam, & poſtremo ipſius cubus ex tabula ſumatur, atque hæc tria addantur ea lege, ut unitates primi facti reſpondeant decadibus ſecundi, & unitates ſecundi decadibus tertii, ac ſumma ſubtrahatur a numero compoſito ex primo reſiduo, & ſecunda periodo; quodſi ſubtractio fieri nequeat eo quod ſumma ſubtrahenda ſit major numero minuendo, quotus ille tandiu unitate mulctetur, donec ſubtractio fieri poſſit. 3. Operatio præcepta in *n*. 2. repetatur in periodis ſequentibus. *d. f.*

In polinomio literali operatio eſt prorſus eadem. En utriuſque exemplum. Sit 1. eruenda radix ex numero 12812904. calculus ita ſe habebit.

Digitized by Google

```
234)                          12,812,904
          12)                  48,12
           3                   4167
        ------              ----------
          36                    645
           54
           27
      -----------
          4167
      -----------
          1587)        6459,04
             4)        645904
      ----------     -----------
          6348
          1104         000000
            64
      ----------
         645904
```

Sit 2. eruenda radix tertia ex polinomio $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + 6abc + c^3$. En calculum.

$$a+b+c) \quad a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + 6abc + c^3$$

$$\begin{array}{l} a^3 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 3a^2 & 3a^2b, + 3ab^2 + b^3 \\ b) & 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ \hline 3a^2b & 0 \quad 0 \quad 0 \\ 3ab^2 & \\ b^3 & 3a^2c + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + 6abc + c^3 \\ & 3a^2c + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + 6abc + c^3 \\ \hline & 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3a^2 + 6ab + 3b^2 \\ c) \\ \hline 3a^2c + 6abc + 3b^2c \\ 3ac^2 + 3bc^2 \\ c^3 \end{array}$$

Dem. Ea-

Dem. EAdem est cum demonstratione Problematis præcedentis, eamque facile applicabit huic Problemati, qui principia demonstrata in *cor. gen.*, & *cor.* 5. *probl.* 10. probe assequetur. *q. e. d.*

Sch. *EXamen utriusque extractionis facile deducitur ex* def. 26. *Numerus nempe propositus est quadratum ejus, qui invenitur in prima extractione, adeoque si inventus multiplicetur per se ipsum, vel si elevetur ad secundam potentiam, debet prodire numerus, qui cum proposito idem sit, si radix inventa vera est; radix autem inventa in secunda extractione debet elevari ad dignitatem tertiam, & inde prodire debet numerus idem cum proposito, ut illa radix vera sit.*

ARTICULUS IV.

De Operationibus Arithmeticæ in numeris fractis.

Th. 20. *FRactionis valor est quotus ex divisione numeratoris per denominatorem.*

Dem. QUotus ex divisione *a* per *b* exponitur fractione $\frac{a}{b}$ (*cor.* 6. *def* 26) sed quantitas numero exposita venit communiter sub nomine valoris numeri; igitur valor fractionis est quotus ex divisione numeratoris per denominatorem prodiens *q. e. d.*

Cor. 1.

Cor. I. SI plures fractiones habeant numeratores, qui eodem modo ſuos denominatores contineant, aut eodem modo in ſuis denominatoribus contineantur, quoti ex diviſione numeratorum per ſuos reſpectivos denominatores erunt æquales (*def.* 25) adeoque fractiones ipſæ erunt æquales. Si vero numerator unius pluries contineat ſuum denominatorem, quam numerator alterius, quotus pluries unitatem continebit in primo caſu, quam in ſecundo (*def.* 25) adeoque erit maior, (*n.* 8 *Prol.*) igitur ipſa fractio in primo caſu erit maior; ſi vero numerator unius pluries contineatur in ſuo denominatore, quam numerator alterius in ſuo, ille minorem denominatoris partem continebit, quam iſte (*n.* 8 *Prol.*) adeoque (*Sch.* 2 *def.* 25.) numerator ſecundus quodammodo continet pluries denominatorem ſuum, quam primus; & per dem: fractio ſecunda maioris erit valoris, quam prima, ſic $\frac{2}{9} = \frac{4}{18}$, & $\frac{8}{4} = \frac{48}{24}$, ſed $\frac{16}{4} > \frac{12}{6}$, & $\frac{10}{30} < \frac{3}{5}$. Vice verſa ſi fractio $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, & numerator $a = c$, etiam denominator $b = d$, ſi $b = d$, cum numeratores debeant in ſuis denominatoribus æqualiter contineri ex dem: etiam numeratores erunt æquales (*Th.* 19) ſi $a \gtrless c$, etiam $b \gtrless d$. (*Th. cit.*) nempe ſi fractio fractioni æquatur, & numerator unius æquatur numeratori alterius, etiam denominatores erunt æquales, ſi in eadem hyp. æquantur denominatores, etiam numeratores erunt æquales, ſi unius numerator ſit

maior, vel minor, etiam major, vel min r erit denominator, si major, vel minor denominator unius, etiam major, vel minor ejusdem numerator.

Cor. 2. SI divisor, & dividendus per idem, vel per æqualia multiplicentur, vel dividantur, quotus idem constanter est (*Cor.6.th.*17.) igitur si numerator, & denominator fractionis per idem, vel per æqualia multiplicentur, aut dividantur, fractio eiusdem semper manet valoris; ex quo patet valorem fractionum a magnitudine terminorum non esse æstimandum: sic $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

Cor. 3. SI in fractione $\frac{a}{1}$ numerator, & denominator ducantur in quemcumque numerum *b*, orietur inde fractio $\frac{ab}{b} = \frac{a}{1}$ (*cor.* 6. *Th.* 24.] cuius denominator erit numerus ipse *b*, per quem termini multiplicantur. Sed $\frac{a}{1} = a$ (*cor.* 4 *def.* 25) igitur si integrum quodcumque *a* reducendum sit in fractionem spurjam cujuscumque denominatoris, intentum obtinetur ipsum integrum ducendo in datum denominatorem, & facto subscribendo denominatorem eundem: sic 7 reducta ad quintas efficiunt $\frac{35}{5}$

Cor. 4. SI idem per maius dividatur, quotus minor est, quam si per minus, & si maius per idem dividatur, quotus maior est, quam si per idem dividatur minus. (2. *p. Th.* 19.] ergo si fractiones eundem habeant numeratorem, ea mi-

ea minor eſt, quæ majorem habet denominatorem, &, ſi habeant eundem denominatorem, ea maior eſt, quæ maiorem habet numeratorem; ſic $\frac{5}{3} < \frac{4}{3}$, & $\frac{8}{9} > \frac{8}{16}$

Cor. 5. SI diviſor æquatur dividendo, quotus eſt 1 (*cor.* 3. *def.* 25.) ſi dividendo minor eſt,, quotus eſt unitate maior, ſeu unitatem pluries, quam ſemel, continet, ſi maior ſit, quotus integram unitatem ne ſemel quidem continet, ſed aliquam tantum ipſius partem (*def.* 25.) igitur, ſi in fractione denominator æquatur numeratori, fractio æquivalet uni integro, ſi ſit numeratore minor, fractio eſt uno integro maior, ſi ſit maior, fractio eſt uno integro minor, & in primo, ac ſecundo caſu fractio eſt ſpuria, vera eſt in tertio caſu (*def.*20.) ſic $\frac{5}{5} = 1$, $\frac{6}{14} = 1 + \frac{2}{4}$, & $\frac{3}{9} < 1$. æquatur uni parti tertiæ unius, ut conſtabit inferius.

Cor. 6. INtegra, quibus æquivalet fractio, ſunt fractionis valor, adeoque ex fractione ſpuria integra eruuntur, ſi numerator per denominatorem dividatur. Quodſi in diviſione reſiduum aliquod ſuperſit, indicio id erit, integra inventa non eſſe adæquatum valorem, ſed ipſis adijciendam eſſe fractionem, cuius numerator ſit illud reſiduum, denominator autem ipſe diviſor, ſeu denominator primæ fractionis ſpuriæ [*prob.* 6.) Sic $\frac{52}{7} = 7 + \frac{3}{7}$

Cor. 7. SI dividendus sit N, divisor M, erit $\frac{N}{M} = \frac{Q}{1}$, (*cor.*4 .*def.*25.) jam idem numerus Q exponit tum multiplicitatem N super M, tum submultiplicitatem M relate ad N, & tum multiplicitatem Q super 1, tum 1 respectu Q submultiplicitatem. [*cor.* 2. *def.* 25.] Igitur in fractionibus $\frac{M}{N}$, & $\frac{1}{Q}$ adhuc idem erit exponens submultiplicitatis numeratoris respectu denominatoris, adeoque & ipsæ æquales erunt (*cor.* 1.)

Th. 21. *FRactiones diversorum denominatorum sunt numeri heterogenei.*

Dem. DEnominator exponit nomen partium, quas numerat numerator, (*Th.* 9.) seu quæ in numeratore dicuntur unum. (*def.* 1.) Si ergo fractiones diversis gaudeant denominatoribus, diversæ etiam, & diversi nominis sunt partes, quæ in numeratoribus dicuntur unum, & pars una exposita per unam fractionem non potest dici unum respectu unius earum, quæ ab altera exponuntur [*n.* 3. *Prol.*] adeoque heterogeneæ sunt (*num.cit.*) sed fractiones sunt harum partium numeri (*cor.* 1. *th.* 9.) ergo fractiones diversorum denominatorum sunt numeri heterogenei *q. e. d.*

Th. 22. *FRactiones, quæ exponunt partes totorum heterogeneorum, sunt numeri heterogenei.*

Dem. SI negas, sint homogenei; igitur partes per eas fractiones numeratæ sunt unitates homogeneæ, ita ut pars P totius T possit dici

ſit dici unum reſpectu partis p. totius t (*n.* 3. *Prol.*) Sicuti ergo totum T exurgit ex repetitione unitatis P (*n.* 6. *Prol.*) ita exurget etiam ex repetione unitatis p. Jam denominator eſt numerus, qui exponit quoties pars in toto contineatur (*th.* 6.) Si ergo hæ partes eodem nomine gaudeant, totum t continebit toties partem p, quoties totum T continet partem P, vel ipſam p; (*ex dem*) ſi diverſo, tota T, & t diverſo modo continebunt partem p; adeoque in primo caſu æqualia erunt, inæqualia in ſecundo (*n.* 6. *prol.*) ſed quæ æqualia, vel inæqualia ſunt, homogenea ſunt (*n.* 8. *prol.*) igitur tota erunt homogenea, *quod eſt contra hyp.*

Sch. *Tota heterogenea eſſe poſſunt, vel quia ſignant res diverſas, vel quia rem eandem diverſo modo ſignant. Si totum unum ſit pondus, alterum extenſio, ſunt heterogenea in primo ſenſu; ſi totum unum ſit menſura Romana, alterum Pariſina, dicuntur heterogenea in ſecundo ſenſu. Fractiones heterogeneæ propterea quod referuntur ad tota heterogenea in primo ſenſu, ad homogeneas reduci nullo pacto poſſunt; rerum enim eſſentiæ ſunt immutabiles; ſed relatæ ad tota heterogenea in altero ſenſu, ad homogeneas reduci poſſunt. Quoniam enim tota, ut ut heterogenea, rem eamdem ſignant diverſo modo, ſeu diverſimode rei eiuſdem quantitatem exponunt, ſi ſtabiliatur aliqua eiuſdem rei minima portio, quæ toti utrique applicetur, & utrumque numeret, utrumque exprimetur numeris ad eamdem unitatem relatis conſequenter homogeneis. Sic pes Pariſinus, & Romanus*

manus sunt tota, quorum unum non potest dici unum respectu alterius, & hoc sensu adhuc sunt heterogenea, & fractiones $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$, quarum prima ad Parisinum, altera ad Romanum referatur, adhuc heterogeneæ sunt, sed si linea prima, vel secunda &c. accipiatur pro unitate, & utrique pedi applicetur, & mensura utriusque exponatur numero ad ipsam lineam relato, evadent tota homogenea, & heterogeneæ ipsæ fractiones, si ita modificentur, ut ad eandem lineam, ad quam referuntur tota, & ipsæ referantur, homogeneæ fient. Usuvenit etiam, præsertim in subdivisionibns numerorum, mensurarum, ut una, & eadem res habeatur pro toto, & parte. Sic asses respectu juliorum considerantur ut partes, respectu teruntiorum considerantur, ut tota, unde etiam prodeunt aliæ heterogeneæ fractiones, quarum illæ, quæ oriuntur ex immediata divisione primi totius, dicuntur simplices, quæ vero oriuntur ex divisione mediata partium primi totius, dicuntur fractiones fractionum; quarum quidem duplex est genus. Vel enim fractio fractionis refertur ad unam partem earum, quæ a denominatore fractionis superioris exponuntur, tamquam ad totum; vel refertur ad totam fractionem superiorem. Sic, si $\frac{3}{7}$ + $\frac{2}{9}$ sint fractiones, quarum prima sit simplex, & altera sit fractio fractionis, vel $\frac{2}{9}$ intelliguntur esse nonæ partes unius septimæ, vel trium septimarum. Adverte in primo sensu fractionem fractionis congrue

poni

poni post simplicem, in secundo ante ipsam. Sic si $\frac{2}{9}$ *sint duæ nonæ unius septimæ, scribitur* $\frac{3}{7} + \frac{2}{9}$, *si sint trium septimarum, scribitur* $\frac{2}{9}\ \frac{3}{7}$ *substituto loco signi additionis signo multiplicationis, cuius rei ratio infra manifesta erit; ex quo etiam diverso modo enunciantur; sic* $\frac{3}{7} + \frac{2}{9}$ *leguntur* tres septimæ, plus duæ nonæ unius septimæ, *sed* $\frac{2}{9}\ \frac{3}{7}$ *leguntur* duæ nonæ trium septimarum. *Agedum ergo, quoniam additio, & subtractio, non fiunt nisi numeri dati sint homogenei* [cor. gen. art. 1.] *fractiones heterogeneas, propterea quod referuntur ad diversa tota, reducamus ad tota eadem; inde heterogeneas ratione diversi denominatoris ad eumdem, ut sic ad operationes suscipiendas præparentur.*

Prob. 15. F*Ractionem fractionis ad simplicem reducere*

Resol. 1.° SI fractio fractionis fuerit sub signo +, seu primum sensum (*in sch. præc.*) descriptum præseferat, duc denominatorem simplicis in denominatorem fractionis fractionis; & factum erit denominator novæ fractionis simplicis ejusdem valoris cum fractione fractionis, numerator vero ille ipse, quem fra-

ctio fractionis habebat. Sic $\frac{2}{9}$ unius decimæ valent $\frac{2}{90}$ unius integri.

Quodsi fractiones huiusmodi plures fuerint, ita ut quælibet posterior referatur ad anteriorem, uti fractio fractionis ad simplicem fractionem, tum earum quælibet reducetur in simplicem, si eius denominator ducatur in denominatores omnium antecedentium, & factum numeratori, quem antea habebat, subscribatur. *e. g.* $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{2}{3} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4}$ &c. $=$ $\frac{2}{3} + \frac{3}{15} + \frac{2}{45} + \frac{3}{360} + \frac{1}{1440}$ &c. *q. e. 1. f.*

2 Fractiones fractionum in secundo sensu ante signum nempe multiplicationis positæ, reducuntur ad simplices, ducendo in se invicem numeratores, ac denominatores, & factum ex his subscribendo facto ex illis: sic $\frac{3}{5}\ \frac{2}{7} = \frac{6}{35}$, & $\frac{2}{5}\ \frac{4}{7}\ \frac{3}{8} = \frac{24}{280}$ *q. e. 2. f.*

Dem. I. DEnominator simplicis exponit omnes aliquotas, in quas totum primo dividitur, (*th* 4.] denominator secundæ exponit omnes aliquotas, in quas dividitur secundo quælibet ex aliquotis primis [*sch. prac. & th. cit.*) jam vero, si tot aliquotæ secundæ, quot continet una aliquota prima, toties sumantur, quot sunt aliquotæ primæ (*h. e; si ducantur in se invicem denominatores ex def.* 24.) habe-

Digitized by Google

habebitur numerus omnium aliquotarum secundarum, quas continet totum: seu factum ex denominatoribus exponet omnes aliquotas totius: & non amplius aliquotas aliquotæ. Fractio igitur huiusmodi facto denominata erit simplex. (*sch. praec.*) hæc ut plenius intelligantur, peculiari exemplo applicemus. Sit fractio fractionis $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$; totum continet octo octavas, & quælibet octava continet quatuor quartas unius octavæ; hinc totum continet octies quatuor quartas unius octavæ, seu triginta duas quartas unius octavæ. Cum enim numerus omnium aliquotarum sit denominator partium, 32 denominabit partem quartam partis octavæ.

Fractio fractionis evadit fractio simplex, si loco denominatoris ipsius substituatur factum ex denominatore, quo primo gaudebat, in denominatorem fractionis simplicis (*ex dem.*). Quodsi fractiones fractionum plures fuerint ad simplices reducendæ, fractio fractionis secunda evadet simpliciter fractio fractionis, si prima evadat simplex, & ipsa secunda evadet simplex, si eius denominator ducatur in denominatorem primæ ad simplicem reductæ. Sed denominator primæ ad simplcem reductæ est factum ex denominatore primæ fractionis fractionis in denominatorem fractionis simplicis (*ex dem.*) ergo fractio fractionis secunda reducta ad simplicem fractionem habet pro denominatore factum ex denominatore, quo gaudebat, in denominatores primæ fractio-

fractionis fractionis, & fractionis simplicis. Simili modo res ostenditur, si aliæ fuerint. Ut hæc demonstratio nitidior fiat, fractio simplex notetur *f*s, fractio fractionis notetur *ff*, secunda *fff*, tertia *ffff*. Demonstratio ita exponetur. Ut *ff* evadat *f*s debet duci denominator ipsius *ff* in denominatorem *f*s. Evadente *ff* in *f*s, ipsa *fff* consideratur ad instar *ff*, quæ reducitur in *f*s, si eius denominator ducatur in denominatorem *f.f.* reductæ ad *f*s. Sed denominator *ff* reductæ ad *f*.s. est factum ex denominatore *ff* in denominatorem *f*s; ergo *fff* reducta ad *f*s habet pro denominatore factum ex denominatore *fff* in denominatorem *ff* in denominatorem *f*s. Ad valorem quod attinet, dum loco denominatoris *ff* substituitur factum ex denominatore *ff* in denominatorem *f*s, ex *dem.* nil aliud efficitur, quam ut partes denominatæ per relationem ad *f*s denominentur relate ad totum T. Cum idem numerus aliquotarum earundem, ut ut diversimode denominatarum in diversis relationibus, habeat eundem semper valorem (*num.* 8. *prol.* vel *e in prol.*) & huiusmodi numerus sit numerator ipsius *ff*, (*th.* 9.) patet in reductione salvo valore ipsum esse retinendum.

2 Quodsi *ff* sumatur in secundo sensu,& numerator simplicis sit x, pro singulis unitatibus ipsius x in reductione *ff* ad *f*s ponendus erit numerator ipsius *ff*, qui sit z [*cas.* 1.) sed toties z, quoties x continet 1, est $x\ z$, (*def.* 24.) ergo in reductione numerator esse debebit $x\ z$.

Cor. 1.

Cor. I. CUm pro numero quocumque n sumi possit $\frac{n}{1}$ (*cor.* 4. *def.* 25.) fractio $\frac{a}{b}$ numeri n erit respectu $\frac{n}{1}$ fractio fractionis, quæ reducta ad simplicem evadet in $\frac{an}{b}$; igitur fractio numeri evadit fractio unitatis, si numerus ipse ducatur in numeratorem fractionis. Sic $\frac{1}{4}$ 4 æquatur $\frac{4}{4} = 1$ (*cor.* 6. *th.* 20.)

Cor. 2. HInc fractiones diversorum totorum, seu diversis numeris expressorum, ne etiam ratione eorum heterogeneæ sint, in fractiones unitatis converti possunt. *v. g.* $\frac{1}{3}$ pedis Romani, $\frac{1}{5}$ Parisini heterogeneæ sunt, propterea quod pes ille exponitur numero 1320, & hic numero 1440. Sed ex hoc capite heterogeneæ amplius non erunt, si ipsis substituantur $\frac{1320}{3}$, & $\frac{1440}{5}$ (*cor.* 1.) quæ non erunt amplius fractiones pedum diversorum, sed ejusdem lineæ pro unitate assumptæ.

Cor. 3. TOtum t $= \frac{t}{1}$ (*cor.* 4. *def.* 25.) $= \frac{tT}{T}$ (*Cor.* 3. *th.* 20.) porro fractio $\frac{t}{T}$ considerata ut contenta sub toto T $= \frac{tT}{T}$ fractioni contentæ sub unitate (*Cor.* 1) $= t$ (*cor.* 3. *Th.* 20.) Igitur, si totum t referre velimus ad totum T, ipsius valorem, tuetur

Digitized by Google

tuetur fractio $\frac{t}{T}$ relata tamen, non ad unitatem, sed ad totum T. *v. g.* pes Romanus relatus ad Parisinum æquivalet $\frac{1320}{1440}$ pedis Parisini, non unitatis.

Cor. 4. Sit ergo fractio $\frac{x}{z}$ totius t, quod relatum ad totum T degenerat in fractionem $\frac{t}{T}$ (*cor.* 3) est ergo $\frac{x}{z}$ fractio fractionis $\frac{t}{T}$, quæ reducta ad simplicem evadit $\frac{tx}{TZ}$ (*Prob. præc.*) quæ fractio & ipsa referetur ad totum T, sicuti simplex $\frac{t}{T}$: sic $\frac{1}{3}$ pedis Romani evadit in $\frac{1320}{4320}$ pedis Parisini.

Cor. 5. Et quoniam numerus n, in quo pro unitate aliquod totum sumitur, haberi potest pro fractione $\frac{n}{1}$ eiusdem totius, simili modo numerus, in quo aliquod totum pro unitate sumitur transformari potest in numerum, in quo totum aliud pro unitate sumatur; substituendo loco x ipsum n, & loco z denominatorem 1 in formula $\frac{tx}{Tz}$; ex qua substitutione prodit $\frac{tn}{T}$; sic 7 pedes Romani reducti ad Parisinos efficiunt $\frac{9240}{1440} = 6 + \frac{600}{1440} = 6 + \frac{60}{144}$ (*cor.* 3. *probl.* 11.)

Sch. Ex

Sch. **E***X ipſis formulis regulæ enunciationem potes eruere ; ſic ex formula* $\frac{tx}{Tz}$ *regula reducendi fractionem* $\frac{x}{z}$ *totius* t *ad totum* T *eſt* per factum ex denominatore in totum, ad quod fractio eſt reducenda, dividatur factum ex numeratore in totum, ad quod antea referebatur. *& ex formula* $\frac{nx}{T}$ *regula reducendi numerum, in quo pro unitate ſumatur totum aliquo numero expreſſum, ad numerum, in quo unitas ſit totum alio numero expreſſum eſt*, per numerum reſpondentem toti, ad quod datus numerus eſt reducendus, dividatur factum ex ipſo dato numero in numerum reſpondentem toti, quod in ipſo pro unitate ſumebatur.

Prob. 16. **F***Ractiones diverſi nominis ad idem nomen reducere.*

Reſol. **D**Ucantur in ſe invicem omnium denominatores, & numerator uniuscujusque in denominatores aliarum, factum primum erit communis denominator, & ſecundum reſpectivus numerator fractionis novæ eiuſdem cum data valoris: ſint *v.g.* fractiones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, $\frac{g}{h}$ &c. erit $bdfh$ communis denominator, & $\frac{a}{b} = \frac{adfh}{bdfh}$, $\frac{c}{d} = \frac{cbfh}{bdfh}$, $\frac{e}{f} = \frac{ebdh}{bdfh}$, & $\frac{g}{h} = \frac{gbdf}{bdfh}$, vel ſint $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{7}$, erit 35 communis

deno-

denominator, & $\frac{21}{35} = \frac{3}{5}$, $\frac{10}{35} = \frac{2}{7}$. Sint $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{5}{8}$, erit 168 communis denominator, & $\frac{112}{168} = \frac{2}{3}$, & $\frac{72}{168} = \frac{3}{7}$, & $\frac{105}{168} = \frac{5}{8}$.

Dem. SInt fractiones duæ $\frac{a}{b}$ $\frac{c}{d}$ (*cor* 2. *th.* 10.) $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$, & $\frac{cb}{bd} = \frac{c}{d}$. Sint tres $\frac{a}{b}$ $\frac{c}{d}$ $\frac{e}{f}$ ex *eodem cor.* $\frac{adf}{bdf} = \frac{a}{b}$, $\frac{cbf}{bdf} = \frac{c}{d}$ &c. Eodem modo res eſt manifeſta in pluribus, in præſenti nimirum operatione per idem numerator, & denominator multiplicantur, unde valor (*cor. cit.*] non immutatur.

Cor. HInc datarum fractionum quænam ſit maior, & quænam minor, explorari poteſt: iis ſcilicet ad idem nomen reductis, ea erit maior (*cor.* 1. *th.* 20.) quæ maiorem habebit numeratorem. Sic ex $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$ maior eſt $\frac{5}{8}$; facta enim reductione $\frac{25}{40} = \frac{5}{8}$, cum tamen $\frac{3}{5}$ efficiant tantum $\frac{24}{40}$.

Sch. E*N tibi tandem fractiones ad ultimam homogeneitatem reductas, & ad operationes ſufficienter præparatas. Illud unum deſiderari adhuc poteſt, ut cum terminorum magnitudo operationum ſimplicitati aliquando obſtet, huic quoque incommodo occurramus prob. ſequenti.*

Prob. 17.

Digitized by Google

Prob. 17. FRactionem ad minimos terminos reducere.

Resol. VAlor fractionis idem manet, si numerator, & denominator per idem dividantur (*cor.* 2. *th.* 20:) Porro quanto maior est divisor, tanto minor est quotus (1. *p.* *th.* 19.); ut itaque fractio reducatur ad minimos terminos, quærendus est numerus maximus, qui fractionis terminum utrumque dividat, qui etiam dicitur maxima communis mensura. En regulam. Dividatur terminus fractionis maior per minorem, si nullum fuerit residuum, erit minor mensura maioris, si residuum aliquod prodeat, dividatur minor per residuum; inde residuum primum per secundum, secundum per tertium, donec pervenias ad residuum 0, vel 1. Si veneris ad residuum 0, divisor ultimus erit mensura maxima quæsita, si ad residuum 1. termini fractionis erunt numeri primi (*def.* 15.) adeoque fractio ad minores terminos reduci non poterit per dem: quod ultimus divisor sit communis, & maxima mensura apertum facit sequens.

Dem. SIt numerus maior M, minor m, residuum primum R, residuum secundum R2, tertium R3, quartum R4 &c. Quoniam ultimum residuum *v. g.* R4 dividit R3 sine residuo (*hyp.*), ergo, si ipsum ducatur in ultimum quotum Q4, erit Q4 R4 = R3 (2. *p.* *th.* 17.) adeoque ultimum residuum sumptum vicibus Q4 adæquat penultimum R3. Sed Q. 3. R3 + R4 = R2 (2 *p.* *th.* 17.) Igitur R4, quod aliquoties sumptum metitur ipsa R3 contenta in Q3 R3 (*ex*

 dem.(

dem.), & præterea ſemel ſumptum R4, metitur etiam R2. Simili modo oſtendam metiri etiam R1, m, & M; ergo ultimum reſiduum *v. g.* R4 eſt m, & M menſura communis.

Quodſi negas R4 ultimum diviſorem eſſe menſuram maximam, ſit alia major, quam R4 *v. g.* *x*. Quoniam *x* eſt menſura M, & m, & M = Q1 m + R1 [*n.* 6. *ſub* 8. *Prol.*] ergo *x* eſt menſura m, & R1. Jam m = Q1 R1 + R2 (4. *p. prob.* 6.) ſed *x* eſt menſura m; ergo cum ſit menſura R1, & hinc omnium R1, qui involuuntur in Q1 R1, erit etiam menſura R2. Simili ratione liquet fore *x* menſuram R3, R4 &c. igitur majus *x* erit menſura minoris R4. ſcilicet (*num.* 8. *Prol.*) majus *x* aliquoties repetitum adæquabit minus *q. e. a.* Eſt ergo ultimus diviſor communis menſura maxima. Sit fractio $\frac{168}{240}$, erit M = 240, m = 168, Q1 = 1, R1 = 72, Q2 = 2, R2 = 24, Q3 = 3, & R3 = 0, & fractio $\frac{168}{240} = \frac{7}{10}$

Prob. 18. F*Ractiones addere, & ſubtrahere.*

Reſol. SI fractiones diverſis denominatoribus gaudent, reducantur ad eundem [*Prob.* 12.] colligantur in unam ſummam numeratores, quos obtinent facta reductione, vel ex numeratore minuendæ ſubtrahatur numerator ſubtrahendæ; ibi ſummæ, hic differentiæ ſubſcribatur communis denominator. *d. f.* *v. g.* $\frac{2}{5}$, & $\frac{3}{7}$ additæ

additæ efficiunt $\frac{29}{35}$, & subtractis $\frac{2}{5}$ ex $\frac{3}{7}$ remanet $\frac{1}{35}$. Aliquando compendii causa additio, & subtractio indigitatur mediante signo $+$, vel $-$. Sic in nostro casu summa etiam exprimitur per $\frac{2}{5} + \frac{3}{7}$, & differentia per $\frac{3}{7} - \frac{2}{5}$. Similiter fractionum $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ summa est, vel $\frac{ad+bc}{bd}$, vel $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$, & differentia est, vel $\frac{ad-bc}{bd}$, vel $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$. Nonnumquam numerator subtrahendæ est polinomium, cuius partes diversis signis coniunguntur, eius autem subtractio fit præmisso signo $-$ soli polinomio intra parentheses tamen incluso, & signis eius intrinsecis minime mutatis; ut si ex fractione $\frac{a+b}{c}$ subtrahenda sit $\frac{d-e+f}{c}$ earum differentia erit $\frac{a+b-d+e-f}{c}$, vel etiam $\frac{a+b-(d-e+f)}{c}$ imo id nonnumquam fit etiam in subtractione integrorum: ad evitandum scilicet tædium in mutandis in contraria signis subtrahendi polinomii, ipsum parenthesibus includitur, & eidem toti signum $-$ præfigitur.

Dem. NUmerator numerat aliquotas unitatis, quas fractio exponit (*th.* 9.) Quodsi fractiones reducantur ad idem nomen,

 nume-

numeratores evadunt numeri homogenei (*th.* 21.] qui proinde, si in unam summam colligantur, vel a se invicem subtrahantur, ut cæteri numeri, summa, vel differentia ipsorum numerabit aliquotas omnes a singulis fractionibus datis expositas, vel earundem differentiam, adeoque &c. (*def.* 20. & 21.)

Sch. *Summa huiusmodi, ut plurimum erit fractio spuria, ex qua integra erui possunt* (cor. 6, th. 20.). *Hinc facile eruitur regula summandi, & subtrahendi numeros mixtos* 1. *adduntur mixti, si fractiones sub fractionibus, integra sub integris decenter scribantur; & prius in unam summam colligantur* (*prob præc.*) *fracta, ex quorum summa erutis integris, si aliqua fractio superfit, ea scribitur sub columna fractorum, & integra transferuntur ad columnam integrorum.*

2. *Subtrahuntur primo fractiones, & earum residuum scribitur sub ipsis infra lineam, inde ipsa integra. Quodsi fractio subtrahenda maior fuerit minuenda, ex integris minuendæ ad fractionem transfertur unitas, quæ in fractionum loco tot unitatibus æquivalet, quot unitates continet fractionum denominator. Sic summa* $3 + \frac{2}{3}$, $4 + \frac{1}{2}$, $5 + \frac{3}{7} = 13 + \frac{25}{42}$. *Differentia numerorum* $9 + \frac{3}{4}$, *&* $7 + \frac{2}{3} = 2 + \frac{1}{12}$. *Differentia* $15 + \frac{2}{9}$, *&* $9 + \frac{2}{\ } = 5 + \frac{37}{45}$. *In num-*

Digitized by Google

numeris mixtis uulgaribus fractiones integrorum speciem mentiuntur, quia loco denominatoris aliquod adhibetur nomen, ut cum loco partium duodecimarum libræ dicimus uncias, loco quintarum assis dicimus teruntia, loco duodecimarum oboli denarios &c. Sed si ex nomine, quod præseferunt, eruatur denominator ipsis conveniens, iisdem legibus, quas pro fractis, & mixtis addendis, ac subtrahendis præscripsimus, subiicientur,

Prob. 19. F*Ractiones multiplicare, ac dividere.*

Resol. 1 DUc numeratores, ac denominatores in se invicem, & facto primo subscribe posterius *d. f. q. e.* 1.

2 Duc numeratorem dividendæ in denominatorem dividentis, & huic facto subscribe productum ex numeratore dividentis in denominatorem dividendæ *d. f. . q, e.* 2

Dem. I. SIt multiplicanda $\frac{N}{M}$, cui respondeat quotus Q, multiplicans $\frac{n}{m}$, cui respondeat quotus *q*: [*th.* 20.] erit $\frac{N}{M} = \frac{Q}{1}$, & $\frac{n}{m} = \frac{q}{1}$ (*cor.* 6. *def.* 25.) Quodsi has fractiones fractionum $\frac{N}{M} . \frac{n}{m} = \frac{Q}{1} . \frac{q}{1}$ æquales reducas ad simplices (*p.*1. *prob.* 11.) habebis $\frac{Mm}{Nn} = \frac{Qq}{1} = Qq$. Cum igitur Qq exprimat factum ex datis fractionibus, seu earundem valoribus (*th.* 20.] idem

dem factum exponetur etiam per $\frac{Mn}{N.1}$ *q. e.* I.

2. Quotus ex $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}$ est $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ (*def.* 25.) $= \frac{ad}{bd} : \frac{cb}{bd}$ (*cor.* 2. *th.* 20.) Sed $\frac{ad}{bd} : \frac{cb}{bd}$ (*cor.* 6. *def.* 25.) $= \frac{ad}{cb}$ (*cor.* 2. *th*: 20.) nimirum multiplicando numeratorem $\frac{ab}{bd}$ per $b\,d$ prodit $a\,d$ [2.*p.th.*17.] & multiplicando per bd denomitorem $\frac{cb}{bd}$ prodit $c\,b$. Ergo &c. *q. e.* 2.

Cor. I. INtegrum $a = \frac{a}{1}$ (*cor.* 4. *def.* 25.) si ergo per fractionem $\frac{b}{c}$ multiplicari debeat, factum erit $\frac{ab}{1c} = \frac{ab}{c}$ (1. *p. prob. hujus*) h. e. integrum per fractionem multiplicatur, si ipsum in numeratorem fractionis ducatur.

Cor. 2. SImiliter, si fractio $\frac{b}{c}$ dividi debeat per a, seu $\frac{a}{1}$, quotus erit $\frac{b}{ac}$ (2. *p. hujus*) hoc est fractio per integrum dividitur, si ipsum integrum ducatur in eius denominatorem.

Cor. 3. COntra quotus ex a per $\frac{b}{c}$ est $\frac{ac}{b}$.

Sch. HInc absolvitur multiplicatio, & divisio mixtorum, nimirum multiplicatio numerorum mixtorum quodammodo quadruplex

Digitized by Google

druplex est; cum enim singulæ partes multiplicatoris duci debeant in singulas multiplicandi, prius ducenda erit fractio adhærens multiplicatori in eam, quæ multiplicando adhæret, quæ operatio absolvitur regula in præf. probl. *tradita, inde eadem duci debet in integra multiplicandi ipsius, quod absolvitur regula tradita in* cor. 1. *inde integra multiplicatoris in fractionem multiplicandi, quod rursus perficitur per regulam* cor. 1. *denique integra multiplicandi in integra multiplicatoris, quod expedies regulis* Prob. 6. vel 10. *quodsi integra ex fractionibus secundæ, & tertiæ multiplicationis eruta transferas ad ultimum factum mere integrorum, multiplicatio ex asse absolvetur: sic* $3 + \frac{3}{7}$ in $5 + \frac{2}{9} = \frac{6}{63} + \frac{15}{7} + \frac{6}{9} + 15 = 17 + \frac{1}{7} + \frac{6}{9} + \frac{6}{63} = 17 + \frac{1}{7} + \frac{2}{3} + \frac{6}{63} = 17 + \frac{1}{7} + \frac{2}{3} + \frac{2}{21} = 17 + \frac{399}{441}$. *Divisio pariter mixtorum quadruplex est, eaque absolvitur juxta* (Prob. 10. 2. p. hujus, & cor. 2.) *Sic quotus ex* $9 + \frac{2}{3}$ *per* $3 + \frac{1}{5} = \frac{10}{3} + \frac{2}{9} + \frac{45}{1}$ (45) $+ 3 = 48 + \frac{10}{3} + \frac{2}{9} = 51 + \frac{1}{3} + \frac{2}{9}$ [cor. 6. th. 20.] *Eadem operationes facilius absolvuntur, si numeri mixti convertantur in fractiones spurias, & quidem homogeneas fractioni infimæ speciei juxta regulam*

traditam in cor. 3. th. 20.; *& ex fractione prodeunt post multiplicationem, vel divisionem rursus eruantur integra* (cor. 6. th. 20.) *v. g. si duci debeat* $3 + \frac{2}{3}$ *in* $2 + \frac{3}{4}$, *cum* $3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$, *&* $2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$, *erit factum* $\frac{121}{12}$ (prob præs.) $= 10 + \frac{1}{12}$. *si mixtus componatur ex pluribus partibus, ita ut fractiones posteriores referantur ad unam partem earum, quæ exponuntur per fractionem anteriorem, tamquam ad totum, fractio infima reducenda erit ad simplicem, inde cum antecedente ad idem nomen, postmodum ad fractionem huius nominis reducendum erit ipsum integrum, ne scilicet relationes, quas habent diversæ mixti partes ad tota diversa, misceantur, & pro iisdem habeantur. Sic numerus iuliorum, assium, teruntiorum v. g.* $3 + \frac{4}{10} + \frac{2}{5}$ *reducitur in* $\frac{172}{50}$. *Non desunt apud practicos artificia, quibus non modo in puris, sed etiam in spuriis fractionibus, compendiose magis operantur; sed hic talia sufficit attulisse principia, ex quibus quisque possit marte suo compendia deducere, & compendiorum apud practicos inventorum rationem dessumere.*

Prob. 20. *Ex fractione data radicem quadratam, & cubicam extrahere.*

Resol. Eruatur ex numeratore secunda, vel tertia radix, & huic subscribatur secun-

secunda, vel tertia radix denominatoris. *d.f.q.e.*1.& 2.

Dem. $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$) 2 (*def.* 26.) $= \frac{a^2}{b^2}$ (*probl.* 19.) ergo [*def.* 26.] $\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}}$. Sed $a = \sqrt{a^2}$, & $b = \sqrt{b^2}$ [*def. cit.*] ergo &c. *q. e.* 1.

2. Eodem modo demonstratur.

Cor. 1. Ex numero mixto radix eadem regula eruitur, si ipsius pars integra (*cor.* 3. *th.* 20.) convertatur in fractionem ejusdem denominatoris cum ea, cui adhæret *v. g.* $2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$ (*cor. cit.*), & ejus radix quadrata (*probl. præs.*) est $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ [*cor.* 6. *th.* 20.] & $3 + \frac{3}{8} = \frac{27}{8}$ (*cor.* 3. *th.* 20.), cujus radix cubica (*probl. præs*) est $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ [*cor.* 6. *th.* 20.]

Cor. 2. Si alicujus integri a^2 radix desideretur in partibus, quarum denominator sit b; reducto integro a^2 ad fractionem, $\frac{a^2 b^2}{b^2} = a^2$, $\frac{ab}{b}$ erit illius radix (*probl. præs.*) & quidem in partibus, quibus b nomen tribuit: similiter si in partibus per b denominatis desideretur radix cubica numeri a^3, debebit a^3 reduci ad fractionem, cujus denominator sit b^3, ex qua radix cubica (*probl. præs.*) eruta erit fractio, cujus denominator erit b.

Cor. 3. Si radix secunda desideretur in decimis, erit $b = 10$, & $b^2 = 100$, adeoque numerus propositus erit multiplicandus per 100, quod fit eidem ad dexteram adjiciendo 00 (*cor.* 1. *prob.* 10.) si in centesimis, erit $b = 100$, & $b^2 = 10000$, adeoque numerus propositus erit ducendus in 10000, quod fit ei ad dexteram adjiciendo bis 00. In genere numero proposito adjicienda sunt tot 00, quot 0 sunt in denominatore b. Si vero in decimis, centesimis &c. desideretur radix tertia, simili calculo invenies numero proposito adjicienda esse tot 000, quot 0 sunt in denominatore.

Sch. *Quem usum habeant, quæ in* cor. præc. *demonstravimus, videbis, si ad sequentia bene attendas. Proponuntur plerumque numeri, ex quibus accurata radix erui minime potest, quia perfecta quadrata non sunt, aut perfecti cubi, sed erui solum potest radix maximi quadrati, aut cubi in ijs contenti; atque huius quidem radicis nota ultima si unitate augeatur, ex multiplicatione radicis per se ipsam prodit numerus proposito maior: vide n.* 3. *in res. prob.* 13. *&* 14. *Radix ergo huiusmodi a vera quidem deficit, sed defectus infra* 1. *est; & quo minor quantitas pro* 1. *sumitur, semper defectus ille minor evadit. Quamobrem methodus eruendi radicem in partibus decimis, centesimis &c. ad eas quantumcumque veris approximandas conducit. Non negandum interim, quod ubi ex dato numero integro radix accurata in integris erui non potest, nec in fractis ea erui potest. Ea enim si in fractis daretur, aut esset vera fra-*

ctio

ctio, aut spuria, quæ ad integra reduci non potest (*si enim posset, radix dati numeri daretur in integris, quod est contra hyp.*) *Porro fractio, quæ dati numeri radix sit, in se ducta illum numerum producere debet*. [sch. probl. 14.] *Atqui fractio vera in se ducta integrum nequit producere, sed potius fractionem ipsa minorem* (probl. 19.) *nec integrum producere potest fractio spuria, quæ ad integra reduci non possit. Exponatur enim per mixtum* $a + \frac{b}{c}$, *erit factum* $a^2 + \frac{2ab}{c} + \frac{b^2}{c^2}$. *Jam si ex* $\frac{2ab}{c}$ *eruantur* (*siqua continet*) *integra, aut nihil remanebit, in quo casu habes intentum, aut fractio, cujus denominator sit* c (cor. 6. th. 20.) *Porro* $\frac{b^2}{c^2}$ *est fractio fractionis, cujus denominator est* c (probl. 16.) *adeoque* $\frac{b^2}{c^2}$ *cum illa residua fractione integrum nequit efficere, & proinde etiam in hoc casu intentum habetur. In cubo hujusmodi fractionum spuriarum oriuntur fractiones fractionum, adeoque quoad radicem cubicam propositum luculentius evincitur. Hinc si numeri* a *radix in integris non detur, ea solum indicari poterit per* $\sqrt{}$ a. *Atque en tibi genesim numerorum irrationalium.*

Sch. 2. *Postquam regulas tradidimus operandi in fractis, & mixtis, quoniam usuvenit, ut operationes ipsæ fractiones ita immutent, ut de earum valore judicium ferri nequeat, operæ pretium erit modum hic assignare*

huius-

Digitized by Google

hujusmodi judicium tuto ferendi. Sed prius observo, quodsi integrum signet aliquam speciem superiorem puta libram, assem, decempedam &c. fractio tunc tandem intelligi dicitur, cum invenitur, quot inferiora eadem signet, quot uncias, quot teruntia, pedes &c Totum ergo negotium huc redit, ut si denominator fractionis non sit idem cum illo, quod respondet speciebus inferioribus consideratis ad instar fractionum, specierum superiorum, seu si non sit idem cum numero inferiorum, quæ continet superius, fractio salvo valore convertatur in aliam, quæ hujusmodi denominatore gaudeat. v. g. *in ponderibus libra continet* 12 *uncias; si ergo fractio non gaudeat dinominatore* 12, *in aliam, quæ hunc habeat denominatorem, convertenda erit, ut sic numerator novus uncias numeret, esto igitur.*

Prob. 21. *Fractionem transformare in aliam ejusdem valoris, & denominatoris dati.*

Resol. Duc denominatorem datum in numeratorem fractionis propositæ, & factum divide per primum denominatorem, quoto subscribe datum denominatorem. *d. f. v. g.* $\frac{2}{3}$ sit reducenda ad denominatorem 12, habebis $\frac{24 : 3}{12} = \frac{8}{12}$, ut adeo si sermo sit de ponderibus, illa fractio $\frac{2}{3}$ libræ æquivaleat octo unciis

Dem. Fractio $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ (*cor.* 2. *th.* 20.) $= \frac{ac : b}{c}$ (*idem cor*) *q. e. d.*

Sch. 1.

Sch. I. *SI dividendo* a c *per* b *aliquod residuum supersit* r, *quotus in integris erit numerator proximus fractionis, cui subscribendus est denominator datus, fractio autem* $\frac{r}{b}$ *erit complementum numeratoris ejusdem, cui proinde idem denominator* c *subscriptus intelligetur, eamque ob rem, si quotus in integris proximus sit* q, *residuum* r, *fractio* $\frac{a}{b}$ *reducta ad denominatorem* c *æquivalet* $\frac{q + \frac{r}{b}}{c} = \frac{q}{c} + \frac{\frac{r}{b}}{c} = \frac{q}{c} + \frac{r}{b}\,\frac{1}{c}$ (prob. 11.) *illa igitur fractio, quæ superest in divisione in hoc* prob. *præcepta, est fractio fractionis, cujus simplex ipsi respondens est alia fractio, cujus numerator est* 1, *denominator ille, ad quem prima fractio reducta est. Sic* $\frac{2}{5}$ *reducta ad denominatorem* 12 $= \frac{4}{12} + \frac{4}{5}\,\frac{1}{12}$, *puta in ponderibus quatuor unciis + quatuor quintis unius unciæ.*

Cor. I. QUodsi species inferior aliam sub se contineat, ut *v. g.* uncia scrupulos, ex fractione secunda eodem modo eruentur scrupuli eadem regula, qua unciæ ex prima, si ipsa reducatur ad denominatorem eundem cum numero scrupulorum in uncia contentorum, vel in genere ad numeratorem eundem cum numero specierum inferiorum in superiori contentarum.

Sch. 2. *Hinc practici residuum primum, quod est primæ fractionis numerator, in divisione ducunt statim in denominatorem speciei inferioris, ut si dividant scuta, in* 10, *qui est denominator iuliorum, & factum dividunt per divisorem, qui est illius denominator, quotum hunc adjicientes primo, & subscribentes ipsi pro denominatore eum numerum, in quem duxere residuum primum. Residuum secundum in denominatorem tertiæ speciei, residuum tertium in denominatorem quartæ ducunt, & semper facta dividunt per divisorem primum* v. g. *Dividendo* 19 *scuta per* 7, *quotus est* $2 + \frac{5}{7}$, *qui juxta hanc regulam reducitur in* $2 + \frac{7}{10} + \frac{1}{10} + \frac{0}{5}$ *suppositis speciebus nummorum more Romano divisis, nimirum scuto diviso in* 10 *julios, julio in* 10 *asses, asse in* 5 *teruntia, in quibus divisio terminatur. Unde ille quotus valet scuta duo, julios septem, assem unum, teruntia* 0. *Cum vero ex ipsa divisione nummorum in species inferiores innotescant denominatores harum fractionum, ji reticeri possunt, & subintelligi, sic ut pro illo quoto possit conscribi* 2. 7. 1. $\frac{0}{5}$. *Scimus enim primam notam esse scutorum, secundam juliorum, tertiam assium, quartam teruntiorum.*

Cor. 2. CUm multiplicatio numeri cuiuscumque per 10, 100, 1000 &c. fiat adjiciendo ad dexteram illi numero 0, vel 00, ve

00, vel 000 &c. fractio cuiuſcumque generis ad decimalem cuiuſcumque ordinis reducitur, ſi numeratori ad dexteram tot cyphræ adjiciantur, quot unitates habet numerus exponens ordinem, ad quem eſt reducenda, & numerus inde exurgens per denominatorem dividatur. Sic fractio $\frac{2}{5}$ reducta ad decimalem quinti ordinis evadit $\frac{200000 : 5}{100000} = \frac{40000}{100000} = 0.\ 40000$ (*prob.* 5.) & $\frac{3}{7}$ reducta ad decimalem noni ordinis evadit $\frac{3000000000 : 7}{1000000000} = 428571428\ \frac{4}{7} = 0.\ 428571428.\ \frac{4}{7}$

Sch. 3. *Cum in diviſione reſiduum diviſore majus eſſe nequeat, nec ipſi æquari; alias in eo adhuc contineretur, numerator fractionis, quæ ex diviſione emergit, ſemper erit denominatore minor, ac proinde ipſa fractio minor unitate*, (cor. 5. def. 20.). *Eſt autem fractio oriens in reductione fractionum ad datum nomen fractio fractionis, cui reſpondens fractio ſimplex eſt fractio, cuius numerator* 1 *denominator vero ille, ad quem prima fractio reducitur* v. g. *Si* $\frac{2}{7}$ *reducas ad decimas, fractio* $\frac{6}{7}$ *in ea reductione oriens æquivalet* $\frac{6}{7}$ *unius decimæ* (ſch. præced) *huiuſmodi ergo fractio ſimplex reſpectu fractionis in ea reductione orientis ſe habet ut* 1.

(ſch.

(ſch. th. 22.) *& proinde fractio oriens in reductione ad decimalem cuiuſcumque ordinis ſemper minor eſt fractione, cuius denominator ſit articulus illius ordinis, & numerator. 1. Sic* $\frac{2}{7}$ *in* cor. *precedenti valent* $\frac{2}{7}$ 0.00000000 1, *& ipſa hac decimali minores ſunt.*

Cor. 3. REducendo igitur fractionem ex diviſione integrorum prodeuntem ad decimales, ſeu quod perinde eſt, adjiciendo ad dexteram dividendi cyphras, ſeu 0, & diviſionem proſequendo (*juxta ſch.* 1.) quotus ad verum quantunlibet approximatur, ita ut eius defectus ſit minor qualibet minima decimali particula. Sic ſi quotum ex 17 per 7 deſideres, ita vero propinquum, ut ab eo non deficiat ne una quidem millies millioneſima, obtento quoto 2, fractio $\frac{3}{7}$ reducatur ad decimalem, infra quam defectus exiſtere debet, ut in *cor. præc.* huiuſmodi proximus ad verum quotus erit 2. 428571428. Qui a vero deficiet $\frac{4}{7}$ millies millioneſimæ h. e. ne una quidem ſemimillies millioneſima.

Cor. 4. SImiliter ſi numerator fractionis cuiuſlibet multiplicetur toties per ſex, & facto totidem ad dexteram adiciantur cyphræ ſeu 0, quot unitates habet numerus exponens ordinem ſexageſimalis, ad quam fractionem datam reducere volueris, & numerum inde orientem dividas per factionis datæ denominatorem, quotus erit

Digitized by Google

erit numerator ſexageſimalis, ad quam reducere quæris (*vid cor.* 2.) atque hic eadem notanda occurrunt, quæ in *ſch. praced. & eius cor.* notavimus.

Def. 27. SI in reductione fractionis ad decimalem, vel ſexageſimalem, nulla oriatur nova fractio, tunc decimalis vel ſexageſimalis inventa attingit accurate valorem datæ; ex quo *exacta* vocatur; ſi autem nova fractio oriatur, tum decimalis, & ſexageſimalis ad valorem verum datæ fractionis prope accedit, proindeque dicitur *approximans*. In fractione illa, quæ exponit defectum decimalis a vero valore, ſi numerator eſt minor medietate denominatoris, defectus erit infra medietatem unitatis, ad quam refertur nota ultima fractionis decimalis, vel ſexageſimalis: ſi medietati denominatoris numerator æquatur, defectus erit medietas eius unitatis, ſi dimidio denominatore fuerit maior, defectus erit illa eadem unitate maior (*th.* 20.): in ultimo horum caſuum conſultum eſt ultimæ decimalis, aut ſexageſimalis notæ adiicere unitatem, & loco illius fractionis ſubſtituere aliam ſub ſigno —, quæ eodem gaudeat denominatore, ſed loco numeratoris habeat exceſſum denominatoris ſupra ipſum numeratorem. Tunc enim fractio decimalis verum valorem excedet, ſed exceſſu infra medietatem unitatis, ad quam refertur ultima nota, exiſtente. Sic loco $0.\,0\,2 + \frac{6}{7}$ præſtat ſubſtituere $0.\,0\,3 - \frac{1}{7}$. Nam 0. 0 3 ex-

 cedet

cedet valorem verum, ſed exceſſus longe minor erit defectu primæ 0. 0 2.

Prob. 22. FRactiones decimales addere, ſubtrahere, multiplicare, dividere.

Reſol. REducantur ad formam integrorum (*prob.* 5.) inde addantur, ſubtrahantur, multiplicentur, dividantur eadem penitus regula, qua integra ipſa. *d.f.* e. g. 8. 9075 + 88. 70565 + 0. 3040 = 97. 91715. & 8. 9075 − 0. 0088 = 8. 8987. & 8. 345 in 3. 34 = 27. 87230 & quotus ex 6. 4048 per 0. 004 = 1601. 2

Obſerva tamen in multiplicatione locum integrorum ad ſiniſtram promoveri toties, quot notas habent poſt integra multiplicator, & multiplicandum, in diviſione vero locum integrorum in quoto tot loca habere poſt ſe ad dexteram, quot unitates remanent ſubtracto numero notarum poſt integra in dividente ex numero notarum poſt integra in dividendo.

Dem. FRactiones adduntur, & ſubtrahuntur reducendo primum eas ad idem nomen, deinde numeratores ipſarum addendo, vel ſubtrahendo (*Prob.* 18.). Porro decimales ad formam integrorum reducuntur, reticendo earum denominatores, & numeratorum notas ita diſponendo, ut ex loco ipſarum innoteſcat denominator earum cuilibet conveniens (*Prob.* 5.) ut proinde notæ eundem locum occupantes eodem gaudeant denominatore, & perinde ac in integris a dextra ad ſiniſtram progredientes valorem obtineant decuplum. Igitur ſi numeri, qui exprimunt

primunt decimales ad formam integrorum reductas, addantur, vel ſubtrahantur eodem modo, quo ipſa integra, ſumma, vel reſiduum erit numerus reſpondens ſummæ, vel differentiæ decimalium ipſarum ad formam integri reductæ. Similiter fractiones multiplicantur ducendo in ſe invicem numeratores, ac denominatores (*prob.* 19.) & denominator in decimalibus eſt 1. cum aliquot ad dedexteram cyphris, ſeu 0 (*def.* 21.) Igitur factum ex denominatoribus earum erit 1 cum tot ad dexteram cyphris, ſeu 0, quot earum habentur in multiplicatoris, & multiplicandi denominatoribus (*cor.* 2. *prob.* 10.) ſeu quot ſunt in utroque notæ poſt integra. Igitur, ut factum reducatur ad formam integri, tot notæ dextimæ ſeparari debent in facto numeratorum, quot ſimul notas habent poſt integra multiplicator, & multiplicandum, ut ſic notæ reſiduæ deſignent integra (*prob.* 5.]

Sit denique decimalis $\frac{N}{D}$ dividenda per $\frac{n}{d}$, erit quotus $\frac{N}{n} \cdot \frac{d}{D}$ (*prb.* 19.) $= \frac{N}{n} : \frac{D}{d}$ (*Prob. cit.*) h. e. quotus eſt fractio, cuius numerator eſt quotus emergens ex diviſione numeratoris dividendæ per numeratorem dividentis, denominator vero quotus emergens ex diviſione denominatoris dividendæ per denominatorem dividentis. Quoniam ergo quotus ſecundus eſt unitas cum tot cyphris, ſeu 0, quot ſunt in denominatore dividendo ſubtractis iis, quæ ſunt in denominatore dividente. (*cor.* 1. *prob.* 11. *&* *def.* 21.] Igitur quoto primo tamquam numeratori

 ſubſcri-

ſubſcribenda eſt 1 cum his cyphris, tamquam denominator. Quæ decimalis, ſi ad formam integri reducatur (*prob.* 5.] locus integrorum habebitur poſt tot notas ad dexteram, quot ſunt cyphræ in denominatore dividendæ demptis iis, quæ ſunt in denominatore dividentis, ſeu, quod perinde eſt, poſt tot notas, quot habentur poſt integra in fractione dividenda, tot ſubtractis, quot habentur poſt integra in dividente.

Sch. *Hic non inanis opera erit, ſi de decimalibus approximantibus nonnulla notemus.*

1. *Si decimales addendæ fuerint approximantes, nota ultima ſummæ erit incerta*, ex def. 27. *Attamen poteſt ultima nota ad ſummum integra deficere* 1. *pro ſingulis binis approximantibus defectivis, vel excedere pro binis approximantibus per exceſſum: defectus enim, vel exceſſus unius ad ſummum unitatis notæ ultimæ medietatem poteſt adæquare.* (def. 27.) *Unde ſi in datis numerentur approximantes utriuſque ſpeciei, dignoſcentur omnes unitates, quæ ad ſummum in nota ultima deficiunt, aut per quas excedit.* v. g. *Si addendæ approximantes fuerint* 12, *ex quibus* 8 *ſint defective*, 4 *excedentes, error in ultima nota ſummæ ad ſummum conſiſtere poterit in duarum unitatum defectu. At ſi ipſæ approximantes aliæ ſint unius, alteræ alterius gradus, tunc non ſolum incerta erit ultima nota, ſed illæ etiam, quæ in ſumma referuntur ad illum gradum* v, g. *ſi fractiones approximantes fuerint* 16 *ex quibus octo ſint ſexti gradus*, 4 *quinti gradus*, 2 *tertii*, & 2 *ſecundi, in-*

Digitized by Google

di, incertæ erunt in summa nota sexta, seu prima ad dexteram, quinta post integra, seu secunda a dextera, nota tertia post integra, seu quarta a dextera, & secunda post integra, seu quinta a dextera, de quibus erroribus singulis juxta regulam paulo ante datam judicare poteris.

2. *In residuo autem si subtrahenda, & minuenda sint ambæ approximantes per defectum, vel per excessum, quoniam defectus, vel excessus major medietatem unitatis notæ ultimæ ad summum potest attingere, idem minore mulctatus infra eam medietatem esse debebit, nota igitur ultima residui erit vero valori propinquior, quam alterutra, vel utraque ultima nota datarum, ut proinde in residuo notæ omnes certæ sint. At fieri tamen potest, ut si data deficiant, residuum excedat, & contra; tunc cum scilicet defectus, vel excessus subtrahendæ est major defectu, vel excessu minuendæ. Sic, si ex* 2.04 $+\frac{2}{5}$ *subtrahi deberent* 0.15 $+\frac{5}{7}$ *facta decimalium subtractione residuum erit* 1.89 *subtractìs autem autem defectibus residuum erit* $-\frac{6}{35}$, *quod cum sit sub signo* $-$, *ostendit residuum inuentum excedere, & cum sit minus tum* $\frac{2}{5}$, *tum* $\frac{4}{7}$, *etiam ex eo colligitur a veritate ipsum minus, quam datas distare. At si altera fuerit approximans per defectum, altera per excessum, tum subtractio errorum sub diversis signis fit ipsos colligendo in unam*

ſummam, (prob. 7. & 9.) *quæ ad ſummum unitatem notæ ultimi reſidui poteſt adæquare, unde in hoc caſu nota ultima reſidui certa non eſt, ſed in unitate integra ad ſummum errorem admittere poteſt, & quidem in defectu, ſi contra vero minuenda excedat, ſubtrahenda deficiat, in exceſſu. Sit enim defectus ſummus minuendæ* $\frac{1}{2}$, *ſit exceſſus ſummus ſubtrahendæ* $\frac{1}{2}$ (*def.* 27.) *primus quidem erit ſub ſigno* $+$, *ſecundus ſub ſigno* $-$, *& ſubtracto ſecundo ex primo reſiduum eſt* [*th.* 12.] $\frac{2}{2}$ (*th.* 20.) $= +1$. *Quodſi exceſſus minuendæ ſummus ſit* $\frac{1}{2}$, *& defectus ſubtrahendæ ſummus pariter* $\frac{1}{2}$, *ille ſub ſigno* $-$, *hic ſub ſigno* $+$, (*def.* 27.) *ſubtractione facta reſiduum erit* $-\frac{2}{2} = -1$. [*th.* 12. *&* 20.]

3 *In multiplicatione, ſi multiplicanda ſit fractio decimalis approximans, facta ex ſingulis multiplicatoris notis in dextimam multiplicandi erunt incerta, quæ cum ordinatim per unum locum ad ſiniſtram promoveantur* (prob 10.) *tot in producto notæ a dextera ad ſiniſtram erunt incertæ, quot ſunt notæ multiplicatoris; & cum aliquo in caſu factum ex aliqua multiplicatoris nota conſtare poſſit duabus notis ambabus incertis, ut ſi defectus fuerit* $\frac{2}{4}$ *& nota multiplicatoris* 7, *& dextima multiplicandi nota pariter* 7, *in facto una adhuc*,

huc, propter dictas, nota incerta esse poterit, unde numerus notarum incertarum in facto superat unitate numerum notarum in multiplicatore exacto. Quodsi exactus fuerit multiplicandus, & approximans multiplicans, cum hic multiplicandus, ille multiplicans fieri possit, (th. 15.) *patet etiam hic notas incertas facti superare debere unitate numerum notarum in multiplicanda exacta; unde in genere, si factor alteruter sit approximans, numerus notarum incertarum in facto semper superet numerum notarum factoris accurati. Cum porro factor ex nota qualibet multiplicatoris in dextimam multiplicandi, sit ipsa dextima toties sibi addita, quoties nota multiplicatoris continet* 1 (cor. 1. def. 24.), *ex numero secundo huius Scholis de maximo errore notarum incertarum judicium proferre poteris. Si factor uterque fuerit approximans, factor pluribus constans notis etiam si factor alter esset accuratus, producet in facto numerum notarum incertarum unitate majorem numero notarum, factor autem constans paucioribus notis aliquibus ex iis notis facti, quæ jam incertæ sunt, propter factorem primum, suam quoq; dubietatem participabit, sed notarum incertarum numerum non augebit* (ex cas. 1. num. huius 3.) *unde, si factor uterque fuerit approximans, numerus notarum incertarum in facto unitate superabit numerum notarum, facti maioris. Quodsi alter sit approximans per defectum, alter per excessum, patet errorem in facto provenientem ex uno factore, vel quoad partem, vel etiam quoad totum tolli posse per eum, qui provenit ex altero. Vereor ne quod monet Wolfiius*

§. 377 *ad corrigendum factum, quando factor tantummodo unus est incertus, & numerator defectus æquatur notæ dextimæ factoris accurati, vera non sint. Ait enim tot unitates adjici facto ex singulis notis factoris accurati in dextimam approximantis (addendum esset* defectivæ; *si enim excederet potius hæ unitates essent demendæ) quot decades involvit factum ipsum. Sic in suo exemplo* 0. 6666 +– 6. 8 *facto* 48 *ex* 6 *dextima nota multiplicandi approximantis per defectum, ut innuit signum* +– *post ipsum adiectum, in* 8 *dextimam multiplicatoris adjicit, pro* 4 *decadibus in* 48, *quatuor unitates, & loco* 48 *usurpat* 52. *Sed id verum esset, si denominator defectus esset* 10, *quod quidem est impossibile, alias enim ipse defectus esset decimalis, & multiplicanda improprie exprimeretur per approximantem* $0.6666 +\!\!- \frac{6}{10}$ *sed melius exponeretur per accuratam* 0. 66666. *Quod si denominator sit minor denario, plures, si maior pauciores unitates adscribendæ erunt prædictis factis. Sit* $\frac{6}{15}$ *factum ex* 8 *in* $\frac{6}{15}$ *erit* $3 +\!\!- \frac{3}{15}$, *unde facto ex* 8 *in* 6 *dextimam multiplicandi notam adnumerandæ tantummodo essent tres unitates, quin tamen ultima nota certa evaderet.*

4. *Denique in divisione, si dividenda fuerit approximans, dividens accurata in facto ex dividente in quotum (h. e. in ipsa dividenda th.* 15.) *numerus incertarum notarum superabit unitate*

sch.)

numerum notarum dividentis (p. 3. huius ſch.] *Cognitis autem notis incertis dividendæ facile agnoſces incertas quoti, ſi bene attenderis ad quoti notas, quæ prodeunt, quando dividens attingit notas dividendæ incertas, eæ enim incertæ erunt. Si dividens ſit approximans, & dividenda accurata, in facto ex dividente in quotum numerus notarum incertarum unitate ſuperabit numerum notarum dividentis, ſi plures ipſa, vel quoti, ſi plures iſte notas habuerit* (ex p. 3. huius ſch.] *& reſidua, quæ oriuntur, dum ex dividenda huiuſmodi factum ſucceſſive ſubtrahitur, erunt incerta, quo ipſo incertæ evadent notæ quoti prodeuntes dividente ad illa reſidua promota. Si dividenda, & dividens fuerint approximantes, reſidua ipſa ex duplici capite fient ambigua, eo quod nempe factum ambiguum ex quoto in dividentem ſubtrahitur ex ambigua dividenda, & notæ quoti prodeuntes, dividente ad illa reſidua promota, pariter ambiguæ erunt.*

Prob. 23. F*Ractiones ſexageſimales addere, ſubtrahere, multiplicare, dividere.*

Reſol. UBi ipſas ad integrorum formam reduxeris [*ſch prob.* 6.) numeròs, qui eundem locum, poſt integra occupant, ſimul adde, vel a ſe invicem ſubtrahe eodem modo, quo adduntur, vel ſubtrahuntur integra, hoc unice notato, ex locis ad dexteram ad loca ad ſiniſtram non transferri unitatem pro unaquaque decade, ſed ſolum pro ſingulis ſexagenarijs; &, ſi in ſubtractione ex loco a ſiniſtra ad proximum

ximum versus dexteram tranferenda sit unitas; eam in hoc valere 60, quæ omnia manifesta sunt ex *sch. Prob.* 5. Sic. 3. 4, 7, 45 + 12. 46, 50, +− 0. 5 = 15. 55, 57, 45, & 12. 46, 50 − 3. 4, 7, 45 = 9. 42, 42, 15. In multiplicatione id unice notandum eam non fieri ducendo singulas notas unius in singulas alterius, & ordinatim facta subscribendo, ut in decimalibus, sed distinctis multiplicationibus prius inveniri debere factùm ex toto numero dextimi loci multiplicatoris in totum numerum, qui est in unoquoque loco multiplicandi, procedendo a dextera ad sinistram, & ex factis ad dexteram ad facta ad sinistram pro singulis sexagenariis unitatem esse transferendam, idemque efficiendo in numeris cæterorum multiplicatoris locorum, cujus quidem exceptionis causam deteximus in (*sch. Prob.* 5.) Cum facta ex numeri totis distinctorum locorum possint esse numeri tribus, & quatuor notis constantes, in quibus non ita facile, & promptè videris, quot sexagenaria contineant, quænam pars ipsorum scribenda sit, & quot unitates ex ipsis ad sinistram sint promovendæ, non levi adiumento erit in multiplicatione Tabula post resolutionem hanc apponenda, in qua exprimuntur facta ex 60 in omnes numeros infra ipsum: si enim in hac Tabula quæsiveris factum quodlibet in multiplicatione inventum vel numerum toto facto proxime minorem, ad latus ejùs numeri habebis numerum unitatum transferendum, & si ex eo subtraxeris numerum Tabulæ, residuum erit pars facti conscribenda,

benda. *v. g.* ducendo 54 in 59 factum est 31. 86, quod quidem in Tabula desideratur, sed numerus proxime minor est 3180, cui ad sinistram respondet 53; loco ergo illius facti scribitur 6 differentia inter 3186, & 3180, & ad sequens factum transferuntur 53 unitates. Divisio denique sexagesimalium fit eadem ratione, qua divisio decimalium; hoc unice notato, quod cum in illis unica nota constent articuli singuli, unica nota, aut ad summum duæ dividendæ dividuntur per unicam dividentis, & quotus semper unica nota, constans in singulis actibus divisionis assumitur, & unitas in illis ad sinistram valet decem in loco proximo ad dexteram, sed in istis articuli constare possunt duabus notis, & proinde non numquam uno ictu duæ simul notæ, vel etiam tres per duas, aut per unam sunt dividendæ, in istis unitas in loco sinistro valet 60 in proximo dextero, & quotus in istis duabus notis constans assumi potest, & in illis multiplicationes fient eodem pacto, ac in integris, sed in istis fiunt regula superius tradita. Tum in facto, tum in quoto numerus locorum post integra determinatur, ut in decimalibus,

Dem. Est prorsus eadem cum demostractione prob. præcedentis, ita ut illa fere quoad verba hic transcribi possit; quod si attendas ad id, quod habent commune essentiæ harum fractionum, quod facile dignoscitur, ex ijs, quæ tradita sunt in Cap. 2. ontologiæ quodammodo huiusmodi prob. demonstrare poteris.

Tabula

Digitized by Google

Tabula pro Arithmetica ſexageſimalium, in qua exhibentur facta ex 60 in omnes ſub ipſo 60

1	60	13	780	25	1500	37	2220	49	2940
2	120	14	840	26	2560	38	2280	50	3000
3	80	15	900	27	1620	39	2340	51	3060
4	240	16	960	28	1680	40	2400	52	3120
5	300	17	1020	29	1740	41	2460	53	3180
6	360	18	1080	30	1800	42	2520	54	3240
7	420	19	1140	31	1860	43	2580	55	3300
8	480	20	1200	32	1920	44	2640	56	3360
9	540	21	1260	33	1980	45	2700	57	3420
10	600	22	1320	34	2040	46	2760	58	3480
11	660	23	1380	35	2100	47	2820	59	3540
12	720	24	1440	36	2160	48	2880	60	3600

Sch. *Fieri quidem poteſt, ut numerus dividendus tum in decimalibus, tum in ſexageſimalibus diviſore minor ſit, & eo in caſu diviſio fieri nequeat. Sed in decimalibus ſalvo valore fractionis, cui ad formam integri reducta reſpondet numerus dividendus, cyphræ quotcumque ipſi dividendo ad dexteram adjici poſſunt, ut diviſore maior evadat, & diviſio actu peragi*

peragi possit; dico salvo valore; notæ enim dividendi adiectis cyphris ad sinistram promoventur, & eo ipso intelliguntur [prob. 5] *denominatori totidem cyphræ adiectæ; quo ipso valor decimalis minime immutatur. In sexagesimalibus vero pari propemodum facilitate dividendus numerus, si sit dividente minor, redditur maior, non ipsum quidem multiplicando per* 10 *aut, eius multiplos, ut fit in decimalibus addendo ipsi cyphras, seu* 0 (Cor. Pob. 2) *sed per* 60 (sch. prob, 5) *aut eius multiplos, & facto decenter in articulos distributo* (p. 3. prob. hujus.)

CAP. IV.

DE COMPARATIONE NUMERORUM

ARTICULUS I.

De Ratione, Proportione, & Progressione Arithmetica.

Def.28. COmparatio numerorum secundum differentiam dicitur *ratio arithmetica*. Identitas duarum hujusmodi rationum dicitur *arithmetica proportio*, discreta quidem, si numeri secundum differentiam comparati sint quatuor diversi, continua vero, si secundus sit terminus *ad quem* in prima ratione, & terminus *a quo* in secunda. Sic $a, a \mp d$ & $c, c \mp d$ sunt

arithme-

arithmetice, *& discretim* proportionales; *a*, $a \mp d$, $a \mp 2d$ sunt arithmetice, & continue proportionales, & in numeris exemplum discretæ proportionis est 2, 5, 7, 10. continuæ vero 2, 5, 8; Series demum continue æquidifferentium, seu cuntinue arithmetice proportionalium est *progressio arithmetica*.

Sch. I. *SI in una ratione arithmetica differentia sit positiva, in altera negativa, huiusmodi differentiæ erunt heterogeneæ* (n. 3. prol.) *& rationes non dicentur eadem. Sic* 4. 2, 8. 10. *non habent eandem rationem arithmeticam.*

Cor. I SIt differentia *d*, & primus terminus *a*, erit secundus $a \mp d$ (*def.* 22. *vel* 23.) dato igitur primo termino invenitur secundus, si primo adijciatur differentia sub signo +, ubi termini crescere debent, sub signo −, ubi descrescere.

Cor. 2. IN prog. ergo arith. erit 2.us $a \mp d$, 3.us $a \mp 2d$, 4.us $a \mp$, $3d$, 5.us $a \mp 4d$ *&c.* &, si numerus terminorum sit *n*, erit ultimus $a \mp (n - 1)d = a \mp nd \pm d$.

Sch. 2. *SIgnum + spectat ad crescentem, − ad descrescentem rationem. Quia, quæ ostensa sunt, utrique conveniunt, id circo utrumque apposuimus. Utriqne etiam rationi conveniunt, quæ sequntnr; sed evitandæ confusionis causa unico, nempe + utemur. Qui demonstrationes sequentes ad rationem decrescentem applicare cupiunt, signa afficientia ipsam* d *in contraria mutent.*

Sch. 2.

Digitized by Google

Sch. 3. *Nota in progreſſione numerum ipſi* d *præfixum indicare diſtantiam termini, ad quem ſpectat, a primo, & differentiam inter duos numeros ipſi* d *prefixos in duobus terminis indicare diſtantiam ipſorum. Sic terminus* a + 7 d *duobus locis diſtat ab* a + 5 *d. Porro cum coefficiens ipſius* d *indicet quoties pro dato termino adiicienda ſit* d *ipſi* a, *terminus poſterior cum anteriore convenit quoad primum terminum, & quoad minorem numerum differentiarum, diſcrepat quoad exceſſum numeri majoris earumdem ſupra minorem.* (k. in Prol.) *Sic* a + 7 d *cum* a + 2d *convenit quoad* a, & *quo ad* 2 d, *diſcrepat in* 5d. *Itaque differentia termini poſterioris ab anteriori habetur, ſi numerus exponens diſtantiam ducatur in* d *differentiam primi a ſecundo.*

Cor. 3. SI inter duos datos quærantur quotcumque medii Arithmetice proportionales, numerus mediorum quæſitorum indicabit diſtantiam ultimi mediorum a primo datorum. Sit itaque primus datorum a, alter b, numerus mediorum n, erit (*ſch.* 3.) $b - a = (n + 1) d$, & (*th.* 19.) $\frac{b-a}{n+1} = d$. Si ergo differentia datorum dividatur per numerum mediorum quæſitorum, 1. auctum, quotus erit differentia primi a ſecundo, qua data (*cor.* 2.) reliqui medii inuenientur.

Cor. 4. ULtimus $u = a + (n - 1) d$ (*ſch.* 3.) & (*th.* 13.) $u - a = (n - 1) d$; adeoque $\frac{u-a}{n-1} = d$ [*th.* 19.]; ex qua formula dato primo, & ultimo cum

mo cum numero terminorum invenitur differentia.

Cor. 5. Datis autem u, a, & d invenitur n ſimili calculo. Nimirum $u - a = [n - 1] d$ (*cor.* 4.) ergo (*th.* 19.) $\frac{u - a}{d} = n - 1$, & (*th.* 10.) $\frac{u - a}{d} + 1 = n$.

Cor 6 Datis a, & d, ſi quæratur, quam ſedem occupet in ſerie terminus ad eam ſpectans *v. g.* b; ſi ponatur ſeries terminari in b, b fungetur vice ultimi u. Si ergo loco u ſubſtituatur b in formula exponente n [*cor.* 5.] n exponet ſedem ab ipſo b occupatam. Pari modo ſi quæratur quiſnam numerus occupet ſedem datam m, ſi ponatur ſeries terminari in termino $m$mo; erit m numerus terminorum, & numerus quæſitus erit terminus ultimus; quare ſi in formula (*cor.* 4.) $u = a + (n - 1) d$, loco n ſubſtituatur m, habebitur terminus occupans locum datum, $m$mum

Cor. 7. Si primus eſt a, erit ſumma extremorum $a + u$. eſt vero $u = a + (n - 1) d$ (*ſch.* 3.] adeoque $a + u = 2a + [n - 1] d$, & $u - a = 2a + (n - 1) d - 2a$, (*th.* 13.) $= (n - 1) d$. (*cor.* 4. *def.* 23.)

Cor. 8. In proportione Arithmetica, ſi primus terminus ſit a, & differentia d; erit etiam differentia 3.i a 4.o d, & ſi tertius ſit c. erit 4.us $c + d$, 2.us vero $a + d$ (*cor.* 1.) ſumma vero extremorum $a + c + d$ (*prob.* 8.) Eſt vero etiam ſumma mediorum

$a +$

$a + d + c$ (*prob.* 8.) quare cum ſit $a + c + d = a + d + c$ (*ſch.* 1. *def.* 23.) ſumma extremorum æquatur ſummæ mediorum.

Cor. 9. QUodſi proportio fuerit cotinua ſecundus terminus vices geret duorum terminorum mediorum, & ſumma mediorum erit dupla ſecundi; in proportione igitur Arithmetica continua ſumma extremorum eſt dupla medij (*cor*; 8.]

Cor. 10. SIt inproportione diſcreta primus a, 2.dus b, 3.us c, 4.us d, erit [*cor.* 8.] $a + d = b + c$. hinc $a + d - c = b$, $a + d - b = c$, $b + c - d = a$, $b + a - c = d$ [*th.* 13.] Sit in continua 1.us a, 2.dus b, 3.us c, erit (*cor.* 9.) $a + c = 2b$, $\frac{a + c}{2} = b$ [*th.* 19.) $2b - c = a$; $2b - a = c$. (*th.* 18. & 13.)

Th. 23. *IN progreſſione Arithmetica termini æquidiſtantes ſunt Arithmetice proportionales.*

Dem. TErminorum æquidiſtantium in progreſſione Arithmetica differentia eſt factum ex numero exponente diſtantiam in d (*ſch.* 3. *def.* 28.] cum igitur huiuſmodi exponens diſtantiæ (*hyp.*) idem ſit, & eadem pariter d [*def.* 28.] erunt termini æqujdiſtantes etiam æquidifferentes, ſeu Arithmetice proportionales (*def.* 28.) *q. e. d.*

Cor. 1. SUmma ergo extremorum progr. Arith. æquatur ſummæ mediorum ab extremis æquidiſtantium, &, ſi numerus

terminorum ſit impar, duplo medii. (*cor.* 8. & 9. *def.* 28.)

Cor. 2. SUmma totius ſeriei eſt ſumma extremorum toties ſumpta, quoties ab extremis ad medium procedendo duo termini aſſumi poſſunt (*cor.* 1.) h. e. productum ex ſumma extremorum in dimidium numerum terminorum. (*def.* 24.)

Cor. 3. SI ſumma $ſ$, primus a, ultimus u, erit (*cor.* 2.) $ſ = [a + u] \frac{n}{2}$. Hinc $\frac{ſ}{a+u} = \frac{n}{2}$, & $\frac{ſ}{\frac{n}{2}} = a + u$ (*th.* 19.), & $\frac{ſ}{\frac{n}{2}} - a = u$, $\frac{ſ}{\frac{n}{2}} - u = a$ (*th.* 13.)

Cor. 4. $a + u = 2a + d(n - 1.)$ (*cor.* 7. *def.* 28.) ergo $ſ = \frac{2an + (n^2 - n)d}{2}$ (*cor.* 3.) $= \frac{2an + n^2d - nd}{2}$ (*prob.* 10.)

Cor. 5. QUoniam $u = a + (n - 1)d$ [*cor.* 7. *def.* 28.] erit $u - (n - 1)d = a$ [*th.* 13.] & $a + u = 2u - (n - 1)d$, (*th.* 10.] ergo $ſ = \frac{2an + n2d - nd}{2}$ (*cor.* 2.) $= \frac{2un - n^2d + nd}{2}$ (*prob.* 10.)

Cor. 6. ERgo (*f. in Prol.*) $\frac{2an + n2d - nd}{2} = \frac{2un - n^2d + nd}{2}$, proinde etiam $2an + n2d - nd = 2un - n2d + nd$. [*th.* 18.

Sch.

Sch. EX *his formulis aliæ adhuc erui possent calculo facili, sed hactenus erutæ solvendis circa progressiones Arithmeticas problematis sufficiunt.*

ARTICULUS II.

De Rationibus in se spectatis, & de variis earundem speciebus.

Def. 29. EA quantitatum relatio, vel comparatio, per quam æquales, vel dato modo inæquales dicuntur, ut jam vidimus in *n.* 8. *Prol.* est earumdem *Ratio*: quantitas, quæ refertur *antecedens*, & ea, ad quam antecedens refertur, *consequens* adpellatur: antecedens, & consequens communi nomine dicuntur *Termini Rationis*; in pluribus porro rationibus antecedentia antecedentibus, consequentia consequentibus *homologa* sunt.

Cor. I. ÆQualium unum alterum semel determinate continet (*g. in. Prol*, & inæqualium quodlibet vel aliud continet, vel in alio continetur (*k. & l. in Prol.*) ita ut, si ipsa inæqualia determinentur, & illud ex ipsis, quod pro unitate sumitur, determinetur eo ipso modus, quo unum aliud continet (*cor.* 2. *def.* 1.) quamobrem cuilibet rationum generi respondet determinatus, quo termini se continent, modus.

Cor 2. DIfferens modus, quo quantitas aliam continet (*def.* 12) est di-

verſa ipsarum multiplicitas, vel ſubmultiplicitas, adeoque (*cor.* 1) rationi cuicumque reſpondet determinata antecedentis reſpectu conſequentis multiplicitas, vel ſubmultiplicitas.

Cor. 3. IN diviſione quotus exponit multiplicitatem, aut ſubmultiplicitatem dividendi reſpectu diviſoris (*cor.* 2 *def.* 25.) qui proinde (*cor.* 1) exponit etiam rationem antecedentis ad conſequens.

Cor. 4. Adeoque ſi antecedens ſit *a*, conſequens *b*, ratio *a* ad *b* exponetur per quotum ex diviſione *a* per *b*, h. e. huiuſmodi rationis exponens erit $a : b$ (*def.* 25.) ſeu $\frac{a}{b}$ (*ſch.* 1. *def. cit.*) ſeu hujus fractionis valor.

Cor. 5. IGitur exponens rationis coincidit cum exponente multiplicitatis, aut ſubmultiplicitatis (*cor.* 1. 2 & *cor.* 2 *def.* 25)

Cor. 6. ALgorithmus proinde rationum coincidit cum algorithmo fractionum, ſeu eæ eodem modo, ac fractiones, adduntur, ſubtrahuntur, multiplicantur, dividuntur. (*cor.* 4)

Cor. 7. ANtecedens eſt factum ex exponente in conſequens (1. *p. th.* 17) quodſi dividatur per exponentem, habebitur conſequens, ſi per conſequens, quotus erit exponens, (2. *p. th.* 17) & ſi exponens ducatur in conſequens, habebitur antecedens.

Sch. *EQuidem non minus recte exponitur ratio per quotum ex diviſione conſequentis per antecedens. Nihilominus exponens*

ſemper

Digitized by Google

ſemper nobis erit quotus ex diviſione antecedentis per conſequens, quotus autem ex diviſione termini maioris per minorem, ſive maior ſit antecedens, ſive non, vocabitur Denominator rationis.

Def. 30. HInc dignoſcitur quandonam rationes dicendæ ſint *æquales*, vel, ſi mavis, *eadem*, aut *ſimiles*, quando *inæquales*, vel, ſi mavis, *diverſa*, aut *diſſimiles*; tum ſcilicet *æquales* dicuntur, cum exponentes habent æquales, *inæquales*, cum ſecus, in ſpecie illa *maior*, quæ gaudet exponente *maiore*, *minor*, quæ minore.

Cor. I. EXponens rationis denominat multiplicitatem, vel ſubmultiplicitatem antecedentis reſpectu conſequentis [*cor.* 2. *def.* 25.] quodſi ſimplum conſideretur, ut pars, idem exponens eam partem denominat [*ſch. def.* 13.] in rationibus ergo iiſdem antecedentia conſequentium, vel conſequentia antecedentium ſunt partes ſimiles.

Sch. *CErte in ratione æqualitatis, nec antecedens conſequentis, nec conſequens antecedentis pars proprie dici poteſt. Veruntamen, ſi fuerint duæ rationes æqualitatis, utriuſque exponens erit* 1; *& ſi utriuſque antecedens, ad inſtar partis, quæ ſcilicet ſemel ſumpta totum adæquet, conſideretur, adhuc verum erit eas partes eodem pollere denominatore, & proinde ſimiles eſſe.*

Cor. 2. SI factum dividitur per factorum alterutrum, quotus eſt factor alter (*th.* 17.) ſed ſi factor alter per 1 dividatur, quotus eſt ipſe alter factor (*cor.* 4. *def.* 25.)

Digitized by Google

Igitur rationes 1. ad factorum unum, & factoris alterius ad factum sunt eædem,

Cor. 3. EX *th.* 17., *&* *cor.* *cit.* etiam patet rationem 1 ad quotum eandem esse cum ratione divisoris ad dividendum.

Cor. 4. Ratio, quam habet antecedens ad consequens, est eadem cum ratione exponentis ad 1 (*cor*- 3 *&* *cor.* 2 *def.* 25)

Cor. 5. IN fractione numerator se habet ut dividendus, denominator ut dividens, & ipsa fractio ut quotus. (*th.* 20.) est ergo in omni fractione numerator ad denominatorem, utì fractio ad 1. (*cor.* 3.)

Cor. 6. SI dividendus, & divisor per idem multiplicentur, aut dividantur, quotus idem manet (*cor.* 6. *&* 7. *th.* 17.] ergo si antecedens, & consequens multiplicentur, vel dividantur per idem, ratio manet eadem, scilicet. (*cor.* 2. *def.* 29. *&* *cor.* 2. *def.* 25.] multiplicia, vel submultiplicia antecedentium ad æque multiplicia, vel submultiplicia consequentium eandem rationem habent, ac ipsa antecedentia ad sua consequentia.

Cor. 7. EX *th.* 19. inferes idem ad æqualia, æqualia ad idem, æqualia ad æqualia eandem rationem habere; ut ex *Monito infra ponendo*, ad quæ idem, vel æqualia habent eandem rationem, & quæ ad idem, vel ad æqualia habent eandem rationem, esse æqualia; ex *th.* 19. maius ad idem maiorem habere rationem, quam minus, maius ad unum æqualium habere maiorem rationem, quam minus ad alte-

rum

Digitized by Google

rum, & ex *p.* 2. *th.* 19. idem ad majus minorem habere rationem, quam ad minus, & æqualium unum ad maius, minorem habere rationem quam alterum ad minus; & ex *Monito cit.* quod ad idem habet maiorem rationem, quam alterum ad æqualium alterum, id altero esse maius; & ad quod idem, vel unum æqualium habet minorem rationem, id itidem esse maius.

Cor. 8. SI fuerint duæ rationes $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ quarum prima sit altera maior, cum $\frac{a}{b}$ minuatur crescente eius denominatore, eodem interim manente numeratore, vel decrescente numeratore eodem interim manente denominatore, & $\frac{c}{d}$ augeatur contraria ratione decrescente scilicet denominatore, & eodem interim manente numeratore, vel hoc crescente, & illo interim eodem manente (*cor.* 1. *th.* 20.) si ratio major æquanda sit minori, id fiet, vel minuendo antecedens ipsius, vel augendo ipsius consequens, vel augendo antecedens minoris, vel ejus consequens minuendo.

Cor. 9. SI duo quoti eidem tertio, vel æqualibus sunt æquales, inter se æquantur. (*f. in Prol.*) Quotus uno æqualium major, vel minor, etiam major, vel minor est altero, & majore maior multo major est minore, minore minor multo minor est maiore (*o. & p. in Prol.*) ergo si duæ rationes eidem tertiæ, vel duabus æqualibus æquantur, inter se etiam æquales erunt, & ratio una æqualium maior, vel minor, etiam

major

maior, vel minor eſt altera; & maior ratione maiore multo maior eſt minore, minor minore multo minor eſt maiore.

MONITUM.

IN gratiam eorum, qui in perpendendis demonſtrationibus acumine utuntur, nonnulla hic ut adjiciam opus eſt. Alicubi in Art: 2.do, & ſequentibus cap. III. & in nonnullis corollarjis hujus Articuli ſupponuntur principia quædam, quæ nullibi a nobis demonſtrata ſunt, quamvis facile a quocumque concedantur; quod quidem non parum officit ei propoſito meo, quod in prolegomenìs expoſui. Hujuſmodi principia ſunt inverſiones theor: 10. 11. 13. 14. 18. 19. *Unam, vel alteram hic demonſtrabo; cæterarum demonſtratio ad exemplum iſtarum facile a quocumque excogitabitur*. 1.° *ergo, ſi ſummæ æquales prodeunt addendo ipſis* a, *&* b *idem* c, *vel æqualia* c, *&* d, *vel ſi æquales prodeunt differentiæ ſubtrahendo idem* c, *vel æqualia* c, *&* d, *dico* a = b. *Nam* (hyp.) a ∓ c = b ∓ c, *vel* a ∓ c = a ∓ d. *Ergo* [th. 13. vel 10.) a = b. *Sicuti hic inverſioni th*: 10, *inſervit th*: 13. *& contra, ita inverſioni* 11. *inſervit* 14. *& contra, uti facile videre poteſt, qui vel levi attentione utatur*. 2.do, *ſi* a c = b c, *vel* (poſita c = d] *ſi* a c = b d, *aut etiam ſi* $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$, *aut* $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, *dico* a = b. *Quoniam enim* [hyp.) a c = b c, *aut* a c = bd; *ergo* (th: 19.) a = b, *&*

quoni-

Digitized by Google

quoniam $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$, *aut* $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, *ergo* (th. 18.) a = b. *Cæteræ partes horum theorematum juxta ea, quæ superius innuimus, facili etiam negotio invertuntur. Ii, ad quos præsens monitum dirigitur, intelligent, licet id hic non ostendam, quæ hic demonstrata sunt, nullo modo pendere ab ijs, quæ eadem supponunt; & ad hunc locum non fuisse translata ob defectum principiorum necessariorum ad ea demonstranda in jis locis, quæ in methodo nostra naturali expostulantur. Quodsi quis roget, cur jis in locis non fuerint exposita, is sciat sero me agnovisse hæc omissa fuisse a typothetis, propterea quod ipsis exciderit, aut, nescio quomodo, evanuerit pagina, in qua hæc habebantur.*

Def. 31. SI exponens est 1, antecedens æquatur consequenti, & ratio dicitur *æqualitatis*; si exponens est major 1, antecedens est etiam major consequente, & ratio dicitur *majoris inæqualitatis*, si exponens est 1 minor, antecedens est etiam consequente minor, & ratio dicitur *minoris inæqualitatis*. Si exponens est numerus rationalis, ratio dicitur *rationalis*, si irrationalis, ratio etiam est *irrationalis*; si exponens partim rationalis est, partim irrationalis, ratio est *mixta*. Ratio porro rationalis tot in species subdjviditur, quot species sub se continet exponens rationalis. Rationalis integer exponit multiplicitatem, fractio submultiplicitatem, proinde exponens integer multiplæ, *submultiplæ*, fractus respondet. Rationalis mixtus constans ex 1, & fractione, cuius numeest 1, respondet *superparticulari* (*sch. def.* 13.)

Ratio

Ratio igitur tali exponente gaudens dicetur ſuperparticularis. Quodſi pergas per reliquas partes (*ſch. cit.*) alias rationum rationalium ſpecies intelliges.

Def. 32. SI denique exponens ſit numerus in ſe compoſitus, ratio dicitur *compoſita*, ex iis rationibus, quarum exponentes in ſe ducti conponunt illius exponentem. Sic quoniam exponens rationis 24 : 2 = 12 ſolvi poteſt in factores 3, 4, vel 2, & 6, ratio illa compoſita eſt ex tripla, & quadrupla, vel ex dupla, & ſextupla. In ſpecie ſi exponens componatur ducendo aliquem numerum in ſe ipſum, ratio dicitur *multiplicata* ejus rationis, quam ille numerus exponit, & quidem *duplicata*, *triplicata*, *quadruplicata*, ſi exponens producatur ducendo illum numerum bis, ter, quater in ſe ipſum; ſimplex vero reſpectu duplicatæ dicitur *ſubduplicata*, *ſubtriplicata* reſpectu triplicatæ, & in genere *ſubmultiplicata* reſpectu multiplicatæ. Sic exponens 16 rationis 32 : 2 ſolvitur in 2. 2. 2. 2; adeoque illa eſt quadruplicata duplæ, & ratio dupla *v. g.* 32. : 16. eſt illius ſubquadruplicata; & exponens rationis a^4 : 1. ſolvitur in *a. a. a. a*, proinde illa ratio eſt quadruplicata rationis *a* : 1. Diſcrimen inter rationem multiplam, ſubmultiplam, & multiplicatam, ac ſubmultiplicatam, facile agnoſcetis præſertim ad ea, quæ in *def*, 26. monuimus, attendentes. Si denique exponens ſit factum ex ejus radice ſecunda in ipſum, ratio dicitur *ſeſquiplicata*, & hujus ſubduplicata *ſubſeſquiplicata* vocatur.

Cor. 1,

Cor. 1. Rationum $a:b$, $c:d$, $e:f$ exponentes sunt $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ [*cor.* 4. *def.* 29.) quorum factum est $\frac{ace}{bdf}$ (*prob.* 10.) Igitur ratio $ace:bdf$, quam habet factum ex antecedentibus aliquot rationum ad factum ex earundem consequentibus, est ratio ex jisdem composita.

Cor. 2. Et quoniam huiusmodi fractiones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ sunt exponentes respectivarum rationum simplicium $a:b$, $c:d$, $e:f$, & $\frac{ace}{bdf}$ exponit rationem ex jisdem compositam, exponens igitur rationis compositæ æquatur facto ex exponentibus rationum simplicium.

Cor. 3. In rationibus æqualibus exponens est idem (*def.* 30.) jgitur [*cor.* 2.] exponens rationis duplicatæ est factum ex exponente simplicis in se ipsum, seu (*def.* 26.) secunda ipsius potentia, exponens triplicatæ tertia potentia, & sic deinceps. Porro ejusdem, vel æqualium numerorum potentiæ sunt æquales; adeoque rationes ejusdem, vel æqualium duplicatæ, triplicatæ &c. sunt inter se æquales. (*th.* 18.)

Cor. 4. Si $a:b = c:d$, & $e:f = g:h$, & $i:k = l:m$ &c. erit $\frac{aei}{bfk} = \frac{cgl}{dhm}$ (*th.* 18.) est vero $\frac{aei}{bfk}$ exponens rationis $aei:bfk$ compositæ ex rationibus $a:b$.

$e:f$.

Digitized by Google

$e:f$, $i:k$ [*cor.* 1.] & $\frac{cgl}{dhm}$ exponens rationis $cgl:dhm$ compositæ ex rationibus $c:d$, $g:h$, $l:m$; igitur rationes compositæ ex totidem similibus habent æquales exponentes, adeoque inter se æquales sunt. (*def.* 30.)

Cor. 5 SInt quantitates quotcumque a b c d e f *&c.* & rationes, quas inter se dicunt omnes $a:b$, $b:c$, $c:d$ *&c.* ratio ex his omnibus composita erit (*cor.* 1.) $abcdef.bcdefg = a:g$ (*cor.*1.*def.*32.) In serie ergo quotlibet quantitatum prima est ad ultimam in ratione composita ex rationibus omnium.

Cor. 6. QUodsi hæ quantitates constituant continuam proportionem, ita ut sit $a:b = b:c = c:d = d:e = e:f$ &c. quoniam ratio $ab:bc$ est composita ex rationibus $a:b$, & $b:c$, seu duplicata ipsius $a:b$, estque $a:c = ab:bc$ (*cor.* 5. *def.* 30.) prima erit ad tertiam in ratione duplicata primæ ad secundam. Similiter ratio $abc:bcd$ erit triplicata ipsius $a:b$; unde cum $abc:bcd = a:d$ (*cor.* 5. *def.* 30.) erit prima ad quartam in ratione triplicata primæ ad secundam; & eodem pacto videtur primam fore ad quintam in ratione quadruplicata, ad sextam in quintuplicata &c. ratione primæ ad secundam.

Cor. 7. QUemadmodum $a:e$ est ratio quadruplicata $a:b$, ita $c:g$ est quadruplicata $c:d$ (*cor.* 6.) est vero (*hyp.*) $a:b = c:d$; ergo (*cor.* 3.) $a:e = c:g$. Similiter ostendam $a:f = c:h$, & $a:g = c:i$, & in genere esse a ad aliam

ad aliam quotcumque locis ab ipſa diſtantem, ut *c* ad aliam æquidiſtantem. Sunt ergo in ſerie continua quantitatum eandem rationem habentium quantitates æquidiſtantes in eadem ratione.

Cor. 8. QUoniam ſecunda, tertia, quarta &c. potentia primæ ad ſecundam, tertiam, quartam &c. potentiam ſecundæ eſt reſpective in duplicata, triplicata, quadruplicata primæ ad ſecundam (*cor.* 1. *&* *def.* 26.) erit (*cor.* 6.) prima ad tertiam, ut quadratum primæ ad quadratum ſecundæ, ad quartam, ut cubus primæ ad cubum ſecundæ &c. (*cor.* 3.)

Th. 24. *SI antecedens per aliquid multiplicetur, vel dividatur, per hoc ipſum multiplicatur, vel dividitur exponens rationis, ſi per aliquid multiplicetur conſequens, per hoc ipſum dividitur, ſi dividatur conſequens, per hoc ipſum multiplicatur idem rationis exponens.*

Dem. RAtio $a : b = \frac{a}{b}$, & ejus exponens eſt hujus fractionis valor (*cor.* 4. *def.* 29.) ſed hujuſmodi valor multipiicatur per integrum quodlibet *n* ducendo ipſum in illius numeratorem, dividitur ducendo *n* in denominatorem [*cor.* 1. 2. *&* 3 *prob.* 19] ergo ſi antecedens rationis multiplicetur per aliquid, per hoc etiam multiplicatur, si multiplicetur per aliquid conſequens, per hoc dividitur exponens rationis; ſimiliter ſi antecedens rationis $\frac{a}{b}$ dividatur per *n*, ea evadit $\frac{a:n}{b}$ (*def.* 25.] $= \frac{a}{bn}$ (*cor.* 2. *th.* 20.) ſi per *n* dividatur con-

tur consequens b eadem evadet in $\frac{a}{b:n} = \frac{an}{b}$ ob eandem rationem. Perinde est igitur dividere antecedens, ac multiplicare consequens. Ergo si antecedens dividitur per n, per n etiam dividitur exponens (*ex dem. in cor.* 1) si consequens dividitur per n, per n multiplicatur exponens (*ex dem. in cor.* 2 [*q. e. d.*

Th. 25. *Ratio qualibet est ad quamlibet in ratione composita ex directa antecedentium, & inversa consequentium.*

Dem. Sint rationes $a : b$, $c : d$, seu (*cor.* 4 *def.* 29.) $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ quoniam $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ad : bc$ (*prob.* 19.) ergo $ad : bc$ composita ex directa antecedentium, & inversa consequentium est eadem cum ratione $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ quam habet (*cor.* 4. *def.* 28.) ratio $a : b$ ad rationem $c : d$

Cor. 1. Si loco secundæ rationis $c : d$ ponatur prima inversa $b : a$, ratio composita ex directa antecedentium, & inversa consequentium erit $a^2 : b^2$ duplicata antecedentis ad consequens (*cor.* 1. *def.* 32.) omnis itaque ratio est ad se ipsam inversam in ratione duplicata antecedentis ad consequens.

Cor. 2. Et cum exponens rationis duplicatæ sit secunda dignitas exponentis simplicis (*def.* 26.) exponens rationis, quam habet

habet ratio quælibet ad ſe ipſam inverſam, eſt quadratum exponentis rationis ſimplicis. Eſt vero antecedens ad conſequens, ut exponens ad 1. Ergo omnis ratio eſt ad ſe ipſam inverſam, uti quadratum ſui exponentis ad 1.

Cor. 3. SI ſecunda fuerit $a : c$ habens idem antecedens cum prima, ratio illa compoſita ex directa antecedentium, & inverſa conſequentium erit $a\,c : a\,b = c : b$ (*cor.* 5. *def.* 29.) adeoque prima ratio erit ad ſecundam in ratione inverſa conſequentium.

Cor. 4. SI ſecunda ſit $c : b$ habens idem conſequens cum prima, ratio illa compoſita erit $a\,b : c\,b$ (*cor.* 1. *def.* 31.) $= a : c$ (*cor.* 5. *def.* 30.) ſcilicet rationes, quæ eodem conſequente gaudent, ſunt in ratione directa antecedentium.

ARTICULUS III.

De Proportione, ejus proprietatibus, & variis in ipſa argumentandi modis.

Def. 33. IDentitas, ſeu ſimilitudo duarum rationum *proportio* dicitur, quæ, ſi conſequens primæ rationis ſit idem cum antecedente ſecundæ, appellatur *continua*; ſin minus, *diſcreta*.

Cor. 1. INter factum, factores, & 1; & inter dividendum, diviſorem, quotum & 1; ac demum inter antecedens, conſequens, exponentem rationis, & 1; proportio intercedit (*cor.* 2. & 4 *def.* 30.)

Cor. 2.

Cor. 2. IN omni proportione, vel antecedentia consequentium, vel consequentia antecedentium sunt partes similes (*cor.* 1 *def.* 30.)

Cor. 3. EX datis duabus quantitatibus oritur proportio, si per eandem tertiam, vel per æquales ambæ multiplicentur, vel dividantur; facta enim, vel quoti eandem, ac quantitates ipsæ, rationem habent (*cor.* 6. *def.* 30.)

Cor. 4. ALiæ adhuc bene multæ eruuntur proportiones (*cor.* 5. *def.* 30.] quas hic non recenseo, protereaquod clarissimæ sunt, & sua sponte fluunt.

Cor. 5. SI quantitates proportionales sint *a*, *b*, *c*, *d*, proportio exponetur exponendo rationes *a* ad *b*, *c* ad *d*, & earum æqualitatem. Porro ratio *a* ad *b* exponitur per $a:b$ & ratio *c* ad *d* per $c:d$ [*cor.* 4. *def.* 29.] ipsa autem æqualitas per $=$ (*n.* 8 *Prol.*) signum ergo derivativum proportionis quatuor quantitatum *a*, *b*, *c*, *d*, est $a:b=c:d$.

Th. 26. *IN omni proportione factum extremorum, scilicet antecedentis primæ rationis in consequens secundæ, æquatur facto mediorum, scilicet consequentis primæ in antecedens secundæ; & contra, si factum* a d *duarum quantitatum æquatur facto* b c *aliarum duarum, factores* b, & c *sunt termini medii proportionis, & extremi sunt* a, & d, *vel hi sunt medii, & illi extremi.*

Dem. 1. $\frac{ad}{bd}=\frac{a}{b}$, & $\frac{cb}{bd}=\frac{c}{d}$ (*cor.* 2. *th.* 20.)

sed

ſed $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (*def.* 30. & *cor.* 4. *def.* 29.) ergo $\frac{ad}{bd} = \frac{cb}{bd}$ (*f. in prol.*) adeoque $ad = cb$ (*th.* 18.) *q. e.* 1.

2. $ad = bc$ (*hyp.*) & $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$ (*th.*19] ſed $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$, & $\frac{bc}{bd} = \frac{c}{d}$ (*cor.*2.*th.*20.)ergo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ [*f. in prol.*] ſeu $a : b = c : d$ (*cor.* 3. & 4. *def.* 29.) *q. e.* 2.

Cor. I. SI in præſenti demonſtratione loco æquationis $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ſubſtituatur $\frac{a}{b} \gtrless \frac{c}{d}$, & in toto ejus decurſu loco ſigni = ſubſtituatur $\gtrless$, ultima concluſio erit $da \gtrless bc$, adeoque ſi fuerit $a : b \gtrless c : d$, erit etiam $ad \gtrless bc$, ſeu factum extremorum erit majus, vel minus facto mediorum. Similiter, ſi in ſecunda parte, exceptis æquationibus $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$, & $\frac{bc}{bd} = \frac{c}{d}$, loco ſigni = ſubſtituatur $\gtrless$, eadem demonſtratione oſtendes, ſi factum $a\,d \gtrless c.\,b.$ erit $a : b \gtrless c : d$.

Cor. 2. SI proportio fuerit continua antecedens secundæ rationis erit idem cum consequente primæ (*def.* 33.) adeoque factum mediorum erit quadratum secundi (*def.* 26.) in proportione igitur continua factum extremorum æquatur quadrato medii.

Cor. 3. HInc eruitur formula exprimens terminum quemcumque proportionis; si nempe fuerit proportio $a : b = c : d$, erit $a d = b c$, & (*th.* 19.) $d = \frac{bc}{a}$, $a = \frac{bc}{d}$, $b = \frac{ad}{c}$, $c = \frac{ad}{b}$. Quod si ea fuerit $a : b = b : c$, erit $a c = b^2$, & $a = \frac{b^2}{c}$, & $c = \frac{b^2}{a}$, & $b = \sqrt{a c}$.

Cor. 4. SI inter a, & b quærantur quotcumque medii continue proportionales vi hujus th. facile etiam inveniuntur. Quæratur enim 1.° unus x, erit (*cor.* 6. *def.* 32.) $a^2 : x^2 = a : b$, & $a^2 b = a x^2$, & $a b = x^2$, seu $x = \sqrt{a b}$, ut in cor. 3. Quærantur 2.° duo x, & z (*cor.* 6. *def.* 32.) $a^3 : x^3 = a : b$, & $a^3\ 3 = a x^3$ & $a^2 b = x^3$ (*th.* 19.) unde $x = \sqrt{a b^2}$ (*th.* 19.) inter hunc inventum, & datum b mediat z inveniendus per regulam 4 casus primi. Si quærantur tres, erit eorum primus $\sqrt{a^3 b}$, inter quem, & b mediant duo inveniendi per regulam casus secundi, & sic porro. Ex observatione autem casuum singulorum patet quæsitorum primum semper haberi, si per datorum alterum multiplicetur potentia primi habens eundem

dem exponentem cum numero mediorum quæsitorum, & ex facto eruatur radix, cujus exponens dictum numerum 1. superet. E. g. 3 Primus duorum mediantium inter 4, & 32 est $\sqrt[3]{4^2 \cdot 32} = 8$. Methodum eruendi radices superiorum graduum in arithmetica sublimiori trademus.

Cor. 5. Quoniam factum $a\ d = 1.\ a\ d$ (*b in prol.*) erit (*p. 2. th. præs.*) $1 : a = d : a\ d$; unde alia ratione hic patet, quod superius jam demonstratum est, esse scilicet in multiplicatione 1 ad factorem unum, ut factor alter ad factum. Similiter sit b quotus, a divisor, erit dividendum $a\ b$, & $1 : b = a : ab$ h. e. unitas ad quotum, ut divisor ad dividendum.

Cor. 6. Si fractionis f numerator sit factum aliquod ex factoribus a, & b, v. g si $f = \frac{ab}{c}$ erit $f\ c = a\ b$ [*th.* 18.) & [2. *p. th. hujus*) $c : a = b : f$; in omni nempe fractione denominator est ad factorem unum numeratoris, ut factor alter ad fractionem.

Cor. 7. Quoniam in omni proportione $a : b = c : d$ (1 *p. hujus*) $a\ d = b : c$, & (*th* 18.) $a^2 d = a\ b\ c$, erit (2. *p. hujus*) $a : d = a^2 : b\ c$, h. e. prima est ad quartam, uti quadratum primæ ad factum mediarum.

Cor. 8. Similiter si loco multiplicandi $a\ d$, & $b\ c$ per a, multiplicetur per d, erit $ad^2 = b\ c\ d$ (*th.* 18.) & [2 *p. huius*) $a : d = bc : d^2$, sed (*cor.* 7.) $a^2 : d = a^2 : bc$, ergo (*cor*: 8. *def*. 30.) $a^2 : bc = bc : d^2$ h. e. in omni pro-

portione factum mediarum est media proportionalis inter quadrata extremarum.

Cor. 9. SI $a2 = d2$, erit $a : a = d : d$ [*cor.* 6. *def.* 30.) ergo (*cor.* 8.) $a2 : ad = ad : d2$,, h. e. si quadratum $a2 = d2$, erit factum ex radicibus inter hæc quadrata media proportionalis; vel si ponatur $a : b = c : d$ erit bc ad [2. *p. huius*) sed $a2 : bc = bc : d2$. [*cor.* 8] ergo $a2 : ad = ad : d2$, (*cor.* 7. *def.* 30.]

Th. 27. IN *omni proportione* $a : b = c : d$, *si* a *sit terminus maximus, erit* d *minimus, & a + d summa maximi, & minimi maior* c + b *summa reliquorum.*

Dem. I. $a : b = c : d$ (*hyp.*) seu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (*cor.* 4. *def.* 29.) Quoniam igitur numerator a major numeratore c (*hyp*,) etiam denominator b major erit denominatore d (*cor.* 1, *th.* 20.) &, cum numerator a sit terminus maximus, erit suo denominatore b major (*hyp.*) & hinc numerator c etiam major denominatore d (*cor.* 1. *th.* 20] unde $d < c < b < a$ *q. e.* 1.

2 Iam vero b ($c - d$) $>$ d [$c - d$][*th.* 18.) h. e. $bc - bd > dc - dd$ (*prob.* 10.] & adjiciendo utrique $d2 + bd$, erit [*th.* 11.] $bc - bd + d2 + bd > dc - d2 + d2 + bd$, seu (*prob.* 6.) $bc + d2 > dc + bd$, & (*th.* 19. & *prob.* 11.) $\frac{bc}{d} + d > c + b$. Sed $\frac{bc}{d} = a$ (*cor.* 4. *th.* 26.) ergo (*n.* 8. *prol.*) $a + d > c + b$. *q. e.* 2.

suo de-

Digitized by Google

Th. 28. IN *omni proportione* a : b = c : d *est etiam invertendo* b : a = d : c, & *alternando* a : c = b : d.

Dem. $ad = bc$ [*th.* 26.] & (*p.* 2. *th.* 26.) $b : a = d : c$. *q* : 1. & $a : c = b : d$. *q. e.* 2.

Cor. I. EST igitur etiam 1 ad multiplicandum, ut multiplicans ad factum, 1. ad denominatorem, uti fractio ad numeratorem, & simili pacto inverti, ac alternari possunt omnes proportiones demonstratæ in corollariis def.num præc.

Cor. 2. SI factorum *a*, & *b* alteruter divisus intelligatur per *m*, factum evadet $\frac{ab}{m}$ (*cor.* 1. *prob.* 19.] & in hac fractione $1 : m = \frac{ab}{m} : ab$ (*cor.* 1:) si factor alter *b* dividatur per *n*, factum erit $\frac{ab}{mn}$ (*prob.* 19.] & [*cor.* 1.) $1 : mn = \frac{ab}{mn} : ab$. Si demum factor uterque sit *a*, & dividatur per *m*, erit factum $\frac{a2}{m2}$ (*prob.* 19.) & $1 : m2 = \frac{a2}{m2} : a2$; scilicet in prima hyp. factum post divisionem est ad factum ante divisionem, uti 1. ad numerum dividentem, in secunda ipsa facta sunt ut 1 ad factum ex divisoribus; in tertia uti 1 ad quadratum divisoris, & factum evadit ita submultiplum, sicuti 1 est submultipla divisoris [*cor.* 2. *def.* 29. & *def.* 12.]

Cor. 3. SI in proportione $a : b = c : d$ antecedens $a = c$, quoniam (2. *p.*) $a : c = b : d$, etiam $b = d$, & si $b = d$ etiam $a = c$ (*cor* 7. *def.* 30.) Si $a \gtrless c$, etiam $b \gtrless d$ (*cor. cit.*] h. e. si in proportione antecedentia æquantur, etiam æquantur consequentia: si æqualia sunt ista, æqualia sunt & illa, si antecedens primum majus, vel minus secundo, etiam consequens primum majus, vel minus erit secundo.

Cor. 4. IN proportione $a : b = c : d$ (2. *p.*) est etiam $a : c = b : d$. Sed $ma : mc = a : c$, vel $\frac{a}{m} : \frac{c}{m} = a : c = b : d$ [*cor.* 3. *def.* 30.] ergo $ma : mc = a : c = b : d$, vel $\frac{a}{m} : \frac{c}{m} = a : c = b : d$ (*cor*, 3. *def.* 30.) & rursus alternando (2. *p.*) $ma : b = mc : d$, vel $\frac{a}{m} : b = \frac{c}{m}$; sunt ergo ma, mc, vel $\frac{a}{m}, \frac{c}{m}$ simul æqualia, vel majora, vel minora ipsis b, d (*cor.* 3.) sunt vero ma, mc æquemultiplicia, & $\frac{a}{m}, \frac{c}{m}$ æquesubmultiplicia antecedentium a, & c (*cor.* 2. *def.* 25.) In omni igitur proportione æquemultiplicia, vel æquesubmultiplicia antecedentium simul sunt, vel æqualia, vel majora, vel minora ipsis consequentibus: idem patet assumptis æquemultiplicibus, vel submultiplicibus consequentium.

Th. 29

Th. 29. IN omni proportione $a : b = c : d$ *factum antecedentium* $a\,c$ *est ad factum consequentium* $b\,d$, *uti quadratum antecedentis* a^2 *ad quadratum sui consequentis* b^2, *vel uti* $c^2 : d^2$ 2.° *factum ex terminis primæ rationis est ad factum ex terminis secundæ, uti quadratum antecedentis* a^2 *ad quadratum antecedentis* c^2.

Dem. I. $a\,d = b\,c$ (1. *p. th.* 26.) & multiplicando per $a\,b$ erit (*th.* 18.) $a^2\,b\,d = a\,b^2\,c$, & (2 *p. th.* 26.) $a^2 : b^2 = a\,c : b\,d^2$, vel multiplicando per $c\,d$ (*th.* 18.) $a\,c\,d^2 = b\,c^2\,d$, & (2 *p. th.*) $c^2 : d^2 = a\,c : b\,d$. *q. e.* 1.

2. $a : b = c : d$ (*hyp.*) & alternando (2. *p: th.* 28.) $a : c = b : d$, & (1. *p.*) $a\,b : c\,d = a^2 : c^2 = b^2 : d^2$ *q. e.* 2.

Th. 30. IN omni proportione $a : b = c : d$ *est etiam componendo*, $a + b : b = c + d : d$, *& dividendo* $a - b : b = c - d : d$.

Dem. $a\,d = b\,c$ (1. *p. th.* 26.) & (*th.* 10, *vel* 13.) $a\,d \mp b\,d = b\,c \mp b\,d$, scilicet (*prob.* 10.] $(a \mp b)\,d = b\,(c \mp d)$ unde (2. *p. th.* 26.) $a \mp b : b = c \mp d : d$, *q. e.* 1. & 2.

Cor. I. SI $a + b : b = c + d : d$ [2. *p.*] $a + b - b\,(a] : b = c + d - d\,(c) : d$, & iterum $a + b - b - b\,(a - b) : b = c + d - d - d\,(c - d) : d$; &, si $a - b : b = c - d : d$ (1. *p.*) $a - b + b\,(a) : b = c - d + d\,(c] : d$, & iterum $a - b + b + b\,(a + b) : b = c - d + d + d\,(c + d)\,d$: (*reductiones in parenthesibus factæ sunt vi prob.* 6.) scilicet, si summa antecedentis, & consequentis est ad con-

 sequens

Digitized by Google

ſequens, uti ſumma antecedentis, & conſequentis alterius ad alterum conſequens, etiam differentia primi antecedentis, & conſequentis erit ad primum conſequens, uti differentia ſecundi antecedentis, & conſequentis eſt ad ſecundum conſequens, & contra.

Cor. 2. SI totum $a + b$ eſt ad totum $c + d$, uti ablatum b ad ablatum d, cum etiam ſit alternando (2. *p. th.* 28.] $a + b : b = c + d : d$, erit [2. *p. hujus*) $a + b - b$ (a]: $b = c + d - d$ [c) : d, & alternando (2. *p. th.* 28.) $a : c = b : d$: imo ob $a + b : c + d = b : d$ (*hyp.*) erit etiam (*cor.* 8. *def.* 30.) $a : c = a + b : c + d$, nimirum etiam reliquum a ad reliquum c, uti ablatum b ad ablatum d, & uti totum $a + b$ ad totum $c + d$.

Cor. 3. HInc invertendo eruitur 1.° $b : a \mp b = d : c \mp d$, 2.° Alternando $b : d = a \mp b : c \mp d$, & quoniam ex $a : b = c : d$ (*hyp. th. hujus*) fit alternando $a : c = b : d$, habetur 3.° (*cor.* 8. *def.* 30.) $a \mp b : c \mp d = a : c$ 4.° alternando $a \mp b : a = c \mp d : c$. 5.° invertendo $a : a \mp b = c : c \mp d$.

Cor. 4. QUoniam (*hyp. th. hujus*) $a : b = c : d$, & alternando $a : c = b : d$, eodem modo, quo in *cor.* 3. evincam 1.° $a \mp c : c = b \mp d : d$ (*vi th. hujus*) & vi principiorum in *cor.* 3. *cit.* 2.° $a \mp c : b \mp d = c : d$ 3.° $a \mp c : b \mp d = a : b$ 4.° $a \mp c : a = b \mp d : b$ 5.° $c : a \mp c = d : b \mp d$, 6.° $a : a \mp c = b : b \mp d$ in omni ſcilicet proportione ſumma, vel differentia antecedentium eſt ad ſummam, vel differen-

tiam

Digitized by Google

tiam consequentium, ut antecedens ad consequens &c. *Enunciatio aliorum Theorematum in præsenti coroll. contentorum ex characteristica facile erui potest.*

Cor. 5. Sint rationes similes quotcumque $a:b = c:d = e:f = g:h = i:k = l:m$ &c. erit (*cor* 4.) $a \mp c : b \mp d : = c:d$, sed $c:d = e:f$ [*hyp.*] ergo (*cor.* 8. *def.* 30.) $a \mp c : b \mp d = e:f$, & rursus (*cor.* 4.) $a \mp c \mp e : b \mp d \mp f = e:f$, sed $e:f = g:h$ (*hyp.*) ergo (*cor.* 8. *def.* 30.) $a \mp c \mp e : b \mp d \mp f = g:h$, & [*cor.* 4.] $a \mp c \mp e \mp g : b \mp d \mp f \mp h = g:h$. Similiter per cæteras pergere potes; unde si fuerint rationes quotcumque similes, erit summa, vel differentia omnium antecedentium ad summam, vel differentiam consequentium, uti antecedens quodlibet ad suum consequens.

Cor. 6. Si summentur, vel subtrahantur, duo, vel tria tantum antecedentia, erunt ad summam, vel differentiam suorum consequentium, uti antecedens quodlibet ad suum consequens. (*cor.* 5.) *v. g.* $e \mp g : f \mp h = g:h$, vel $c \mp e \mp g \mp i : d \mp f \mp h \mp k$, vel etiam $g \mp i \mp l \mp n : h \mp k \mp m \mp o = n:o$, sed (*hyp.*) $e:f = g:h$, vel $e:f = i:k$, vel $e:f = n:o$; igitur [*cor.* 8. *def.* 30.] $a \mp c \mp e : b \mp d \mp f = e \mp g : f \mp h = c \mp e \mp g \mp i : d \mp f \mp h \mp k = g \mp i \mp l \mp n : h \mp k \mp m \mp o$ &c. nempe summa, vel differentia duorum, vel trium antecedentium ad summam vel differentiam suorum consequentium, ut summa vel

vel differentia quotlibet antecedentium, ad summam, vel differentiam suorum consequentium.

Cor. 7. Ulterius, cum ex hyp. rationes datæ omnes sint simplices, tum eæ quæ sunt loco impari, scilicet 1.a 3.a 5.a &c. tum eæ, quæ sunt loco pari, scilicet 2.a 4.a 6.a &c. constituunt seriem rationum similium, adeoque (*cor.* 6.) summa, vel differentia antecedentium earum, quæ sunt loco impari, ad summam suorum consequentium, uti antecedens quodlibet ad suum consequens; *u. g.* $a \mp e \mp i : b \mp f \mp k = i : k$, & summa, vel differentia antecedentium earum, quæ sunt loco pari, ad summam, vel differentiam suorum consequentium, uti antecedens quodlibet ad suum consequens (*cor.* 6.) *u. g.* $c \mp g \mp l : d \mp h \mp m = f : m$. sed (*hyp.*) $i : k = l : m$, ergo (*cor.* 8. *def.* 30.) $a \mp e \mp i : b \mp f + k = c \mp g \mp l : d \mp h \mp m$. Scilicet in serie rationum similium summa, vel differentia antecedentium earum, quæ sunt loco impari, ad summam, vel differentiam suorum consequentium, uti summa, vel differentia antecedentium earum, quæ sunt loco pari, ad summam, vel differentiam suorum consequentium. alia sequuntur alternando, & invertendo mox demostratatam proportionem Theoremata, alia adhuc ex cor.o 5.o deduci possunt; in iis eruendis, & demonstrandis non inutiliter se exercebit tyro.

Sch. Cum jam demonstratis affinitatem habet etiam Theor. sequens; si in duabus proportionibus consequentia fuerint eadem, erit summa

summa, vel differentia antecedentium sub consequente uno ad consequens ipsum, uti summa, vel differentia antecedentium sub altero ad alterum consequens h. e. *si* a : b = c : d *&* e : b = f : d *erit* a ∓ e : b = c ∓ f : d. *Dem.* ad = bc *&* ed = bf (1 p. Th. 26,) *adeoque* ad ∓ cd = bc ∓ bf. (Th. 10 & 13) *&* (2 p. Th. 26.] a ∓ e : b = c ∓ f : d. *Quodsi sit* e > a, *&* f > c, *tum, ut habeatur etiam* e − a : *b* = f − c : d, *secunda proportio primo loco ponatur, ut nempe sit* e : b = f : d, *&* a : b = c : d. *Ex eadem enim demonstratione habebis etiam* e ∓ a : b = f ∓ c : d. *Hoc ipsum est advertendum tum in Th. præc. tum in ejus cor., ut ubi subtractio fieri nequit, vel ipsa rationes, vel earum ordo invertatur, & rem tentanti apparebit salvam manere hyp. salvam demonstrationem, ut in casu allato in Scholio præsenti.*

Th. 31. *SI duarum proportionum* a : b = c : d, *&* e : f = g : h *termini homologi multiplicentur, vel dividantur facta, vel quoti adhuc porportionem* ae : bf = cg : dh, *vel* $\frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{c}{g} : \frac{d}{h}$ *constituent.*

Dem. I. *ad* = *bc*, & *eh* = *fg* (1. *p. th.* 26.) & (*th.* 18.) *adeh* = *bcfg*, seu *aedh* = *bfcg* (*th.* 15.) & [2. *p. th.* 26.) *ae* : *bf* = *cg* : *dh*. *q. e.* 1.

2. $\frac{ad}{eh} = \frac{bc}{fg}$ (*th.* 19.) ergo (2. *p. th.*

26.) $\frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{c}{g} : \frac{d}{h}$ q. e. 2.

Cor. I. SI proportiones fuerint quotlibet, facile patet etiam hic, quod vel multiplicatis, vel divisis antecedentibus, & consequentibus rationum, quæ sunt loco impari, inde earum, quæ sunt loco pari, facta vel quoti proportionem constituent. Sit enim 3.a proportio $i : k = l : m$, quoniam ex primis duabus facta est una $ae : bf = cg : dh$, ex hac, & $i : k = l : m$ eodem modo fiet una $aei : bfk = cgl : dhm$, & si superaccedat quarta $n : o = p : q$: ob eamdem rationem erit $aein : bfko = cglp : dhmq$ &c. idem dicendum de quotis.

Cor. 2. QUodsi proportiones datæ fuerint $a : b = c : d$, iterum $a : b = c : d$, rursus $a : b = c : d$, adhuc $a : b = c : d$, denuo $a : b = c : d$ &c. prodibit (cor. 1.) $a^2 : b^2 = c^2 : d^2$, $a^3 : b^3 := c^3 : d^3 : a^4$, $b^4 = c^4 : d^4$, $a^5 : b^5 = c^5 : d^5$, & in genere, si proportio $a : b = c : d$ detur vicibus n, erit $a^n : b^n : c^n : d^n$: h. e. quantitatum proportionalium potentiæ ejusdem ordinis, sunt etiam proportionales.

Cor. 3. RUrsus (cor. 1.) $\frac{a}{a} : \frac{b}{b} = \frac{c}{c} : \frac{d}{d}$, h. e. $1 : 1 = 1 : 1$ [cor. 1.) & $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} = \frac{1}{c} : \frac{1}{d}$, $\frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2} : \frac{1}{d^2}$, & $\frac{1}{a^3} : \frac{1}{b^3} = \frac{1}{c^3} : \frac{1}{d^3}$, & in genere $\frac{1}{a^n} : \frac{1}{b^n} = \frac{1}{c^n} : \frac{1}{d^n}$ h. e. si per per potentias ejusdem gradus quatuor quan-

quantitatum proportionalium dividatur 1, quoti erunt proportionales,

Cor. 4. SI $a:b = c:x$ & $d:x = e:z$, erit $ad: bx = ce: xz$, & (1. *p. th.* 26) $adxz = bcex$, & (*th.* 19.) $adz = bce$, & (*th.* 19.) $bce: ad = z$.

Th. 31. *SI fuerint tres numeri hinc* a, b, c, *illinc* d, e, f, *& ordinate ut* a : b, *ita* d : e, *& ut* b : c, *ita* e : f, *erit etiam* a : c = d : f 2.° *Si vero fuerit perturbate ut* a : b, *ita* d : e, *& ut* b : c *ita* f : d, *erit* a : c = f : e.

Dem. 1. $ae = bd$, & $bf = ce$ (*th.* 26.) & (*th.* 18.) $aebf = bcde$, & (2. *p. th.* 26.) $a : c = bde : ebf$: Sed $bde : ebf = d : f$ [*cor.* 6. *def.* 30.] ergo $a : c = d : f$. *q. e.* 1.

2. $ae = bd$, & $bd = cf$ (1. *p. th.* 26.) ergo $ae = cf$ [*f. in Prol.*) & (2. *p. th.* 26.) $a : c = f : e$. *q. e.* 2.

Cor. 1. SI quantitates hinc, & illinc ordinatæ fuerint plures *v. g.* si $a : b = f : g$, $b : c = g : h$, $c : d = h : i$, $d : e = i : k$ &c. erit semper prima *a* ad ultimam *e*, ut prima *f* ad ultimam *k*. Nam ob $a : c = f : h$ (1. *p.*] & $c : d = h : i$ [*hyp.*) erit etiam $a : d = f : i$ [1. *p.*) & eodem modo argumentari licet usque ad ultimam. Quodsi plures hinc, & illinc iterum fuerint, sed ad unam partem contrario modo, ac ad alteram ordinentur *v. g.* hinc sint *a b*, *c*, *d*, & illinc *g*, *h*, *l*, *m*, & $a : b = m : l$, $b : c = l : h$, $c : d = h : g$, ob $al = bm$, & $bh = cl$, & $cg = dh$ [1. *p. th. hujus*] erit etiam $albhcg = mcldh$ (*th*, 18.) & [*th.* 19.] $ag = md$, adeoque

Digitized by Google

adeoque [*p. th.* 26.) $a : d = m : g$ 2 h. e. ultima ad primam hinc, ut prima, ad ultimam illinc. *d* Si vero ita ordinentur ut sit $a : b = l : m$; $b : c = h : l$, $c : d = g : h$ &c. ob $a\,m = b\,l$, & $a\,l = c\,h$, & $c\,h = d\,g$ [1. *p. th.* 26.) erit adhuc $a : d = g : m$, h. e. prima ad ultimam hinc, uti prima ad ultimam illinc; & si ordinentur ita $a : b = l : m$, $b : c = g : h$, $c : d = h : l$, cum etiam sit $a\,b\,c : b\,c\,d = l\,g\,h : h\,l\,m$ (*cor.* 1. *th.* 30.) erit etiam $a : d = g : m$, prima ad ultimam ordinate, ut prima ad ultimam.

Cor. 2. SI fuerit 1.° $b : a = e : d$, & $b : c = d : e$, cum etiam sit $a : b = d : e$ 1. (*p. th. hujus*) erit adhuc (1. *p.*) $a : c = d : f$. 2.° si $a : b = d : e$ & $c : b = f : e$ cum etiam sit $b . c = e : f$ (1. *p. th. hujus*) erit adhuc [1. *p.*] $a : c = d : f$: 3.° si sit $b : a = e : d$, & $c : b = f : e$ cum etiam sit 1. (*p. th.* 28.) $a : b = d : e$ erit adhuc (*n.* 2.) $a : c = d : f$ 4.° eodem modo si, vel secunda proportio, vel utraque secundæ partis th. inversim proponantur, poterunt reduci ad eas, quæ in hyp. dictæ partis habentur. 1. *p. th.* & hinc inferetur semper illa conclusio; imo id etiam applicari potest illis, quæ statuuntur in *cor.* 1.

Sch. LIcet Regulæ trium, & quinque, *tum directæ, tum inversæ, aliarumque, quæ in scholis Arithmeticorum tanto apparatu tractari solent, expressam nondum offenderitis in nostra Arithmetica mentionem, non dubito tamen affirmare eas iam luculenter satis a nobis fuisse non tantum expositas, verum etiam demonstratas. Regula trium* directa *ex tribus datis eruit quartum*

tum, inverſa *ex tribus datis eruit tertium: Regula quinque importat duas proportiones, quarum quinque termini cognoſcuntur, ſcilicet tres primæ, & duo ſecundæ, quarto primæ vices gerente termini alicuius ſecundæ: duas ea importat quæſtiones, duas incognitas, ſed per huiuſmodi regulam cognitio: ſecundæ quæritur ſolum, ut parcatur labori pro inveſtigatione primæ, ut ſi ſit* a : b = c : x, *&* d : x = e : z, *quæraturque* z. *Regula ſocietatis ex datis antecedentibus, & ſumma conſequentium quærit conſequentia ipſa: at huiuſmodi regularum formulas habes* cor.: 3. th: 26. *&* 4. th. 31.

Proponi etiam ſolet regula alligationis, regula falſi &c. ſed qui probe callebunt hujus capitis Theoriam calculum literalem, & problemata omnia, quæ per huiuſmodi regulas ſoluuntur, & expedite magis ſolvent, & eo ipſo regulas adinvenient. Cæterum, ne de me ullus conquæratur, ubi calculi literalis ad ſolvenda problemata applicationem perſequar, cæteras regulas ad inſtar exemplorum proponam, & demonſtrabo.

Ad dignoſcendum, quandonam regula trium, *vel* quinque *directa, vel inverſa ſit, uſus, & naturale ratiocinium confert magis, quam præcepta. Veruntamen quoniam præter hunc, alios etiam habent in Matheſi uſus, ſequentia adiicio.*

1. *Si creſcente* a *uniformiter creſcit* b, *erit* a *ad ſuum incrementum, uti* b *ad incrementum reſpondens incremento ipſius* a. *Sit enim ipſius* a *incrementum* na; *Quoniam eadem lege creſcit* b (hyp) *incrementum ipſius* b *erit* nb, *nimirum evadente* a *dupla, tripla,* n *pla, etiam dupla, tripla*

pla, n *pla evadet* b; *est vero* a : n a = b : n b (def. 30.) *ergo &c.*

2. *Si crescente* a *descrescit* b, *erit* a *ad suum incrementum, uti decrementum* b, *ad ipsam* b. *Eadem enim ratione ostendetur incremento* na *ipsius* a *respondere decrementum* $\frac{1}{n}$ b *ipsius* b, *cum ergo sit* a : na = $\frac{1}{n}$ b : b (*def.* 30.) *liquet propositum*.

3. *Si crescentibus* b, *&* c *crescit* a, *sed alterutra* b *crescente, altera* c *eadem maneat, vel contra,* a : n a = b : n b, *vel* a : m a = c : m c. *Cum enim* (n. 1,) *sit* a : n a = b : nb, *&* a : ma = c : mc, *erit* (*th.* 31.] aa : nama = bc : nbmc. *Jam in primo casu secunda proportio evadit in* a : a = c : c (hyp.] *seu in* 1 : 1 = 1 : 1 [*cor.* 5. *def.* 30.) *& in* 1 : 1 = 1 : 1 *evadit prima in casu altero ob eandem rationem, & tota illa composita evadit in* a : na = b : nb *in primo casu, in secundo evadit in* a ; ma = c : mc (*cor. cit.*) *ergo &c. Eodem modo si* a *crescat crescente* b, *& descrescente* c, *sed crescente* b *eadem maneat* c, *vel decrescente* c *eadem maneat* b, *evincam esse* a : na = b : nb *in primo casu, & in altero casu esse* a : m a = $\frac{1}{m}$ c : c

4 *Quantitates sunt in ratione composita ex directis earum, quibus crescentibus ipsæ uniformiter crescunt. Sint* b, & c, *quibus crescentibus in* B, *&* C, a *crescat in* A. *Ponamus* a *crescere in* x, *dum* b *crescit*

scit in B *eadem interim manente* c, *erit* a : x = b : B (n. 3) *&* x : A = c : C [n. 3.) *&* [th. 31.) a x : Ax = bc : BC, *seu* (cor. 6. def. 30.) a : A = bc : BC. *crescat* a *in* A *crescentibus* b, c, d, *in* B, C, D. *Ponamus* a *crescere in* x *crescentibus* b, c, *in* B, C *eadem interim manente* d, *erit* a : x = bc : BC (ex dem.) *&* (n. 3] x : A = d : D : *unde iterum* (th. 31.] a x : A x = b c d : BCD *&* (cor. 6. def. 30.) a : A = b c d : BCD, *idem ostenditur in omni alio casu, in quo plures adhuc fuerint, quibus crescentibus* a *uniformiter crescat, imo eadem penitus ratione evincitur, si ipsarum* b, c, d, *&c aliquæ crescant uniformiter, aliquæ decrescant, fore* a : A *in ratione composita ex directis crescentium, & inversis decrescentium. Ex mercibus, & pretiis, ex itinieribus, velocitatitatibus, & temporibus facillime peti possunt exempla, quibus si applicetur brevis, & nova hæc theoria, ipsa evadet planior, & eo ipso palpabitur, quam bene conferat in usu regulæ* trium, *vel quinque ad dispositionem terminorum, per quam regula ipsa evadit directa, vel inversa. Velim, attendatur ad vocem* uniformiter; *sic enim evanescent difficultates, quæ contra nostram hanc theoriam suboriri possunt.*

ARTICULUS IV.

De Progressionibus Geometricis.

Def. 34. SEries numerorum continue proportionalium dicitur progressio *geometrica.*

N

trica. Si numeri progressionem componentes fuerint a, b, c, d, ea scribatur $a : b = b : c = c : d = d : e = e : f$ &c. a plerisque scribi solet $\div\!\!: a, b, c, d, e, f$ &c. sed hoc signo nos non utemur.

Cor. I. UNitas, numerus quilibet, & ejus potentiæ ordinatim ascendentes constituunt progressionem geometricam (*cor def.* 26. *&* *cor.* 1. *def.* 33.). & invertendo potentia quælibet superior cum suius inferioribus, & unitate progressionem geometricam efficiunt. Sic $1 : a = a : a2 = a2 : a3 = a3 : a4 = a4 : a5$ &c. & $a5 : a4 = a : a3 = a3 : a2 = a2 : a = a : 1$.

Cor. 2. SIt terminus primus 1, exponens n pro ratione multiplicitatis, & $\frac{1}{n}$ pro ratione submultiplicitatis. Quod si successivi termini, quærantur juxta regulam in (*cor*. 7. *def*, 29.) traditam, in primo casu progressio erit 1, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n2}$, $\frac{1}{n3}$, $\frac{1}{n4}$, $\frac{1}{n5}$ &c. & in secundo erit 1, n, $n2$, $n3$, $n4$, $n5$ &c. h, e. si ratio, juxta quam progrediuntur numeri in progressione ab 1 incipiente, sit multiplex; ipsi sunt potentiæ fractionis, cujus numerator est 1. denominator vero exponens rationis n; si submultiplex, termini progressionis sunt potentiæ ipsius exponentis. Quoniam si ponatur $m = \frac{1}{n}$, est $m2 = \frac{1}{n2}$, $m3 = \frac{1}{n3}$ &c. posthac utemur denominatore m per

fra-

fractionem $\frac{1}{n}$, vel per integrum n explicabili, atque ita una eademque series 1, m, $m2$, $m3$, $m4$, &c. exponet 1, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n2}$, &c. vel 1, n, $n2$ &c. Quodsi primus terminus sit aliqua exponentis dignitas, *v. g.* $n5$ eadem regula invenietur 2.dus $n4$, 3.us $n3$, 4.us $n2$, 5us n, 6us $\frac{1}{n}$, 7.us $\frac{1}{n2}$ &c.

Sch. *Nota numerum terminorum unitate excedere exponentem dignitatum supradictarum. Sic in termino quinto* n.4 *exponens est* 4 = 5 − 1. *Si vero terminus primus sit ipse exponens rationis, tum numerus terminorum coincidit cum exponente dignitatis ipsius* n. *Sic exponens termini* n5 *est* 5, *idem cum numero terminorum*.

Cor. 3. Si terminus primus sit a, denominator m, erit progressio a, ma, $m2a$, $m3a$, $m4a$ &c. (*cor.* 2.)

Cor. 4. Dato primo, & secundo progressionis geometricæ termino, datur etiam exponens (*cor.* 4.*def.*29.] adeoque (*cor.* 2. & 3.) progressio ipsa continuari potest. *v. g.* si primus sit a, secundus b, erit exponens $\frac{a}{b}$, & progressio a, b, $\frac{b2}{a}$, $\frac{b3}{a2}$, $\frac{b4}{a3}$ &c. (*cor.* 3..)

Cor. 5. Dato primo termino a, ultimo u, & numero terminorum n, exponens x facile etiam determinatur; est enim $u = a$

$a\,x^{n-1}$ (*sch. prac.*) $\frac{u}{a} = x^{n-1}$ (*th.* 19.)

$x = \& \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$. Si progressio ab 1. incipiat, $a = 1$, & $\frac{u}{a} = u$ [*cor.* 4. *def.* 25)

Cor. 6. SI detur 1.us & ultimus, ex cor. 5. ita determinatur numerus terminorum n. Nam $\frac{u}{a} = x^{n-1}$ (*cor. cit*) Ducatur ergo in se ipsum exponens datus x tandiu, donec fiat $= \frac{u}{a}$, & exponenti dignitatis, quæ prodit, addatur 1: & habebitur numerus terminorum.

Th. 33. *IN progressione geometrica factum extremorum æquale est facto mediorum ab extremis æquidistantium, &, si numerus terminorum sit impar, quadrato medii.*

Dem. QUoniam rationes numerorum in progressione se sequentium sunt similes [*def.* 34.] erit primus ad secundum in simplici, ad tertium in duplicata, ad quartum in triplicata ratione primi ad secundum, & ad ultimum primus ante ipsum in simplici, secundus in duplicata, tertius in triplicata &c. ratione penultimi ad ultimum, seu [*hyp.*) primi ad secundum. Quare primus ad secundum, ut penultimus ad ultimum, primus ad tertium, ut antepenultimus ad ultimum &c. (*cor.* 3. *def.* 32.) sunt vero secundus, tertius, quartus &c. ita distantes a primo, ut ab ultimo distat penultimus, antepenultimus, tertius ante ultimum &c. adeoque primus

mus ad diſtantem ab ipſo, ut ad ultimum æquidiſtans ab ipſo. Ergo (*th.* 26.) factum extremorum æquatur facto mediorum ab ipſis æquidiſtantium.

Quod ſi numerus terminorum ſit impar, erit primus ad medium, ut medius ad ultimum ob eandem rationem; conſequenter factum extremorum æquabitur quadrato medii [*cor.* 1. *Th.* 26.)

Cor. SIt primus a, ultimus z, qui conſequuntur primum, ſint $a, b, c, d, e.$ qui antecedunt ultimum y, x, u, t, &c. erit $az = by = cx = du = et$, &c. unde $b : c = x : y$, $b : d = u : y$, $b : e = t : u$ &c. h. e. in progreſſione geometrica a, b, c, d, e, t, u, x, y, z, termini a ſe invicem æquidiſtantes ſunt proportionales.

Th. 34. *IN progreſſione geometrica ſumma omnium excepto ultimo ad ſummam omnium excepto primo, uti primus ad ſecundum.*

Dem. ESto progreſſio $a : b = b : c = c : d = d : e = e : f$ &c. [*cor.* 5. *th.* 30.] $a + b + c + d + e : b + c + d + e + f = a : b$. *q. e. d.*

Cor. I. SI primus terminus ſit a, ultimus z, ſumma $ſ$, & ſecundus b, erit $a : b = ſ - z : ſ - a$ & (*th.* 26.) $ſa - aa = ſb - bz$, & $ſb - ſa = bz - aa$ (*th.* 13.) & (*th.* 19.) $\frac{bz - aa}{b - a} = ſ$. Pariter $\frac{ſa - aa}{ſ - z} = b$ [*th.* 19.] & $\frac{ſb - ſa + aa}{b} = z$, (*th.* 13. & 19.) $ſa - ſb = aa - bz$, & (*th.* 19.) $\frac{aa - bz}{a - b} = ſ$. Denique $\frac{aa + ſb - ſa}{b} = z$. (*th.* 10. 13. & 19.)

Cor. 2. SI progressio in infinitum producatur, & ejus termini crescant, erit primus ultimo infinite submultiplex (*def.* 31.) seu ejus pars infinite parva, seu ejus respectu æquabitur o (*n.* 5. *Prol.*) & $aa = o$ [*cor* 4.*def.* 24.] cum igitur summa progressionis crescentis sit $\frac{bz - aa}{b - a}$, erit eadem $= \frac{bz}{b - a}$, & (*cor.*6.*th.*26.) $b - a : b = z : s$; h. e. in prog. geom. infinita crescente differentia primi, & secundi est ad secundum, uti ultimus ad summam. Quodsi progressio decrescat, erit ultimus respectu primi particula infinite parva, seu $z = o$, & [*cor.*4. *def.*24.] $bz = o$. Est itaque ob $s = \frac{aa - bz}{a - b}$, (*cor.* 1.) in progressione decrescente $s = \frac{a}{a - b}$, & (*cor.*6.*th.*26.) $a - b : a = a : s$; h. e. in progressione geometrica infinita decrescente inter differentiam primi, & secundi, ac summam primus est medius proportionalis.

Cor. 3. SI $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, summa s seriei infinitæ, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, &c. in inf. erit $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.(*cor.*3.*prob.*19.) Si $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{4}$, summa seriei $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, &c. in infini-

Digitized by Google

tum erit $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 1$ (*cor.* 5. *th.* 20.)

Eadem ratione invenitur summam seriei $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$, &c. infinitum esse $\frac{1}{2}$. Atque ita summantur series infinitæ, imo etiam inter se comparantur. Sic prima est ad secundam uti $2:1$, ad tertiam, uti $2:\frac{1}{2}$

Th. 35. IN *progr. geom. ut denominator unitate mulctatus ad unitatem, ita differentia termini primi, & ultimi ad summam dempto ultimo.*

Dem. POsito den. m, & reliquis, ut in Th. præc. erit $b = ma$ [*cor.* 2. *def.* 34.) & $a : ma = 1 : m$ [*cor.* 6. *def.* 30.) & [*th.* 34. & *cor.* 8. *def.* 30.) $1 : m = f - z : f - a$, & [*th.* 30.) $m - 1 : 1 = f - a - f + z$ [$z - a$ *prob.* 6.] : $f - z$.

Cor. 1. ESt ergo $\frac{z - a}{m - 1} = f - z$ (*cor.* 3. *th.* 26.) & (*th.* 10.) $\frac{z - a}{m - 1} + z = f$.

Cor. 2. $m - 1 : 1 = ma - a : a$ (*cor.* 6. *def.* 30.) ergo (*cor.* 8. *def.* 30.) $ma - a : a = z - a : f - z$; h. e. excessus 2.di ma supra primum a ad primum, ut excessus ultimi supra primum ad summam omnium dempto ultimo.

Digitized by Google

Cor. 3. EX analogia $m - 1 : 1 = z - a : \int - z$, eruitur etiam $\frac{z}{\int - z} = m - 1$ (*cor.* 3. *th.* 26.) & (*th.* 10.) $\frac{z - a}{\int - z} + 1 = m$, ex qua formula eruitur regula inveniendi denominatorem progressionis ex datis primo, ultimo, & summa.

ARTICULUS V.

De Proportione Harmonica, & Contraharmonica.

Def. 35. QUatuor quantitates dicuntur *harmonice* proportionales, si differentia primæ a secunda sit ad differentiam tertiæ a quarta, uti prima ad quartam. Si secunda bis repetitur, hujusmodi proportio est *continua*, & series harmonice continue proportionalium est harmonica *progressio*.

Cor. I. ESt igitur (*def.* 23.) in proportione harmonica $a - b : c - d = a : d$, & (*th.* 26.) $ad - bd = ac - ad$; unde (*th.* 10.) $2ad - bd = ac$, & (*th.* 19.) $\frac{ac}{2a - b} = d$, & $\frac{2ad - bd}{a} = c$; militer $2ad - ac = bd$ (*th.* 13.) & $\frac{2ad - bd}{d} = b$ (*th.* 19.) Datis itaque tribus terminis proportionis harmonicæ semper inveniri potest quartus.

Cor. 2.

Cor. 2. IN proportione harmonica continua est (*def*: 35.] $a - b : b - c = a : c$, & (*th.* 26.) $ac - bc = ab - ac$. Unde (*th*: 10.) $2ac - bc = ab$, & (*th*: 19.) $\frac{ab}{2a - b} = c$. Porro $2ac = ab + bc$ (*th*: 10.) $\frac{2ac}{a + c} = b$ (*th*:19,) deniq: $2ac - ab = bc$ [*th*:13) & $\frac{bc}{2c - b} = a$ (*th.* 19.)

Sch. 1. *QUoniam datis duobus invenitur tertius continue harmonice proportionalis* [cor. 2.) *si secundus datorum ponatur pro primo, & tertius inventus pro secundo, eadem methodo invenitur quartus, & ita procedendo progressio harmonica producetur.*

Sch. 2. *SI* $b = 2a$, *erit* $2a - b = 0$ (*cor.* 4.*def.* 23.)*adeoq;* $c = \frac{ab}{0}$ [cor.2.) *quæ quantitas est infinita.* [*cor* .7.*def* 25.] *Si igitur datorum primus est subduplus secundi, tertius continue harmonice proportionalis inveniri nequit. Multo minus si* $2a < b$, *tum enim a fortiori prodibit* c *æqualis infinito.*

Def. 36 SI differentia, primi, & secundi ad differentiam tertii, & quarti, ut quartus ad primum, proportio est *contraharmonica, discreta*, vel *continua* in sensu definitionis antecedentis.

Cor. ESt ergo $a - b : c - d = d : a$, unde $aa - ab = cd - dd$, & in continua $a - b : b - c = c : a$, unde $aa - ab = bc - cc$ (*th*: 26.) $aa + cc = bc + ab$ (*th.* 10.) & $\frac{aa + cc}{c + a} = b$ (*th.* 19.)

sch.

Digitized by Google

Sch. UBi *regulas analyseos callebitis, ex duabus primis formulis singulos terminos per eas facile elicietis.*

ARTICULUS VI.

De Logarithmis.

Def. 37. SI progressioni geometricæ 1, n, $n2$, $n3$, $n4$, $n5$, &c. subscribatur arithmetica 0, d, $2d$, $3d$, $4d$, $5d$, &c. terminus quilibet hujus *v. g.* $3d$ respectu homologi $n3$. dicitur *logarithmus*.

Cor. I. SI loco d ponatur 1, series arithmetica evadit in 0, 1, 2, 3, 4, 5 &c. qui termini coincidunt cum exponentibus terminorum seriei geometricæ, *v. g.* $2d$ respondet $n2$, $3d$ ipsi $n3$ &c. est vero $2 : 1 = 2d : 1d$ (*cor.* 6. *def.* 30.) sunt igitur semper log-mi terminorum seriei geom. ab 1 incipientis exponentibus ipsorum proportionales.

Th. 36. *SI log mus 1 est 0, log-mus facti est summa ex log mis factorum, & log-mus quoti est differentia log-mi dividendi a log-mo divisoris.*

Dem. QUoniam $1 : a = b : ab$ (*cor.* 5. *th.* 26.) 1, a, b, ab sunt quatuor termini progr. geom. aut continui, aut bini bini æquidistantes [*cor. th.* 33.) Quare & eorum log-mi sunt termini progr. arith. ab 0 [*hyp.*) incipientis, vel continui, vel similiter discreti (*def.* 37.] adeoque & arithmetice proportionales

nales (th. 23.) Quare $l1 + lab = la + lb$ (cor. 1. th 23) seu $0 + lab = la + lb$ q. e. 1.

2. Si ab sit dividendum, & a divisor, erit b quotus (th. 17.) est vero $lab = la + lb$ (1. p.) & $lab - la = lb$ (th. 13.) ergo log-mus quoti est differentia &c. q. e. 2.

Cor. I. Ex hoc th. eruitur regula multiplicandi, & dividendi dignitates agnatas. Cum enim exponentes earum sint earum log-mi [cor. 1. def. 37.) earum multiplicatio fiet addendo exponentes (1. p.) & divisio exponentes subtrahendo [2. p.) Sic $a3 . a4 = a7$, $an . am = a n+m$ & $a5 : a3 = a2$, $an : am = a n-m$ &c,

Cor. 2. In fractione numerator est dividendum, denominator divisor, & fractio ipsa quotus (th. 20.) log-mus ergo fractionis prodit si a log-mo numeratoris subtrahatur log-mus denominatoris, qui cum in hyp. th. sit $l1. = 0$, erit < 0 h. e. negatiuus (n. 5. in Prob.)

Cor. 3. $\frac{n}{n} = 1.$ (cor. 3. def. 25.) est vero exponens ipsius $n = 1.$ (def. 26.) adeoque exponens $\frac{n}{n} = 1 - 1$ [cor. 10.) $= 0$[cor. 4. def. 23.] Quare $\frac{n}{n} = 1 = n^0$. Simili modo $0 - 1$ est exponens $\frac{n^0}{n}$, seu $\frac{1}{n}$, adeoque $n^{-1} = \frac{1}{n}$, & eadem ratione $n^{-2} = \frac{1}{n2}$, $n^{-m} = \frac{1}{n^m}$

Cor. 4. LOg-mus quadrati est duplus, cubi triplus, potentiæ n, n plus log-mi radicis (1. p. & cor. 1.) seu hic est ad illum ut, $1:n$. Cum ergo sit exponens radicis ad exponentem potentiæ, ut log-mus radicis ad log-mum potentiæ (*cor. 2. def.* 27,) h. e. si exponens radicis sit e, exponens dignitatis E, log-mus radicis l, log-mus dignitatis L, erit $e : E = l : L$, & $eL = El$ (1. p. th. 26.) $\frac{El}{e} = L$, $\frac{El}{L} = e$, $\frac{eL}{l} = E$, $\frac{eL}{E} = l$ (*cor.* 3. *th.* 26.]

Cor. 5. CUm exponens radicis sit ad exponentem potentiæ n, ut $1 : n$ (*cor.* 4.) si a^m elevanda sit ad potentiam n, erit a^m respectu suæ dignitatis n radix, consequenter $1 : n = m : mn$. est ergo mn factum ex exponente dato in eum, quo afficiebatur data dignitas, exponens datæ dignitatis a^m ad potentiam n elevatæ; sic quadratum a^4 est $a^{4.2} = a^8$, cubus a^2 est $a^{2.3} = a^6$ &c. similiter si ex a^m eruenda sit radix n, erit $n : 1 = m : \frac{m}{n}$ h. e. quotus ex exponente datæ potentiæ per exponentem radicis eruendæ est exponens dignitati, ex qua radix illa eruitur, relinquendus: sic $\sqrt[3]{a^3} = a^{3:2}$, $\sqrt{a^6} = a^{6:3} = a^2$, $\sqrt[n]{a^m} = a^{m:n}$ &c.

Sch. *USus log-morum maximus est etiam in numeris vulgaribus. Si enim, quod jam Byrgius, ulacq, aljique præstitere, construantur tabulæ, in quibus ordinatim exhibeantur numeri vulga-*

Digitized by Google

vulgares, & e regione ipsorum locentur eorum log-mi, numerus A *per* B *multiplicabitur, aut dividetur, si ex tabulis excerpantur* l A, l B, *& in iisdem quæratur, quinam numerus respondeat log-mo* $= l\text{A} \mp l\text{B}$. *Similiter elevatio ad potentias per multiplicationem, per divisionem log-morum fiet extractio radicum. Qua ratione construantur hujusmodi tabulæ, priusquam videamus, aliqua sunt notanda. Si* 2.dus *progr. geom. ab* 1 *incipientis terminus sit* 2, *ea non transit per omnes numeros, puta per* 3, 5, 6, 7, *&c. nec per omnes transit, si* 2dus *sit* 3; *aut quivis alter, & in his proinde casibus omnes numeri suum non habent log mum. Eam ob rem ad arbitrium assumitur progr. geom.* 1, 10, 100, 1000, 10000 *&c. articulorum primariorum, qui stabilito log-mo* $1 = 0$, *& log mo* $10 = 1$, *eo ipso suum omnes obtinent determinatum log-mum. Iam vero numerorum intermediorum accurati log-mi non habentur; ut ergo veris quammaxime proximi obtineantur, h. e. a veris ne* 1 *quidem* 10000000.ma *distantes log-mus* 10 *statuitur* 1. 0000000, *& ipsi numeri in operando per hujusmodi decimales exprimuntur.*

Prob. 24. N*Umeri cuislibet, qui non sit articulus primus, log-mum invenire.*

Resol. Sit datus n, qui mediet inter articulos A, & B. Quæratur (*cor.2.th.26.*) inter A, & B media porportionalis t, & si n mediat inter t, & B, inter t, & B quæratur alia media u, si n mediat inter u, & B, iterum alia x, & ita porro, donec venias ad talem z, quæ mediet inter n, & B; tum inter antecedentem puta x, & z quæ-

z quæratur media *y*, adhuc alia inter *z*, & *y* &c. donec venias ad talem M, quæ ab *n* differat minus, quam 1. 10000000ma, id, quod obtinetur, si iuxta *sch. præc.* A, B, *n* in 10000000mis exprimantur (*cor.* 2. *prob.* 14.) 2.° Ex lA, & lB erue (*cor.* 2. *th. præc.*) *lt*, ex *lt*, & lB erue *lu* &c. ex *ly* & *lz*, lM, seu *ln*. 3.° si *n* mediat inter A, & *t* in operatione loco B utendum est A.

Dem. SI prog. ab 1 incipiens instituatur juxta denominatorem ultimæ rationis. ea transibit per omnes huiusmodi medias proportionales (*Art. præc.*) adeoque etiam per illam, quæ ne 1 quidem 10000000ma differet ab *n*; sed ei mediæ proportionali respondet log-mus in solutione inventus (*cor.* 4. *th. præc.*) ergo ille est logmus numeri ab *n* ne 1 quidem 10000000ma distantis, qualis (*sch. præc.*) quæritur

Sch. *TAbulæ euulgares xibent tantum log-mos numerorum* ab 1 *ad* 100000.

Prob. 25. *IN venire log-mum numeri maioris ultimo tabulæ, sed minoris* 10000000.

Resol. REsecentur ex dato quatuor sinistimæ notæ, & log-mus iis respondens in tabula excerpatur, cujus prima nota integra designans augeatur tot unitatibus, quot sunt in dato nnmero notæ ad dexteram residuæ, ut ita habeatur [*sch. th.* 36.) log-mus numeri compositi ex 4 illis notis, & tot 0, quot sunt notæ in numero dato reliquæ post illas 4; qui sit A; totidem unitatibus augeatur prima nota logmi in tabula assumptum proximæ sequentis, ut sic habeatur log-mus numeri B, in quem evaderet

ret datus x, si quarta ejus nota 1. augeretur; & erunt notæ dextimæ post illas 4, differeutia x ab A, numerus vero compositus ex 1, & tot 0, quot sunt illæ notæ dextimæ, differentia ipsius B ab A. Quodsi ergo incrementa log-morum stabiliantur [*quod parum a vero distat*) incrementis numerorum porportionalia, erit $x - A : B - A = lB - lA : lx - lA$, cujus proporportionis primi tres termini cum innotescant ex dem. invenietur etiam quartus (*cor.* 4. *th.* 26.) qui si ipsi lA adiiciatur, ob $lA + lx - lA = lx$ (*prob.* 6.) habebitur log-mus quæsitus.

Prob.26. *INvenire numerum respondentem log-mo maiori ultimo tabulæ, cujus tamen caracteristica non excedat* 4.

Resol. E Log-mo dato subtrahatur log-mus 10, vel 100, vel 1000, vel 10000, ut relinquatur log-mus ultimo tabulæ minor; quæraturque in tabula numerus respondens inventæ differentiæ; quodsi hic ducatur in numerum, cujus log-mus subtractus est, factum erit numerus quæsitus.

Dem. SIt log-mus datus lx, subtractus lA residuus lz, erit [2. *p.th.* 36.) $lx - lA = l\frac{x}{A}$; unde $l\frac{x}{A} = lz$, & $z = \frac{x}{A}$; ergo $Az = x$ [*th.* 18.) *q. e. d.*

Prob.27. *INvenire numerum respondentem log-mo inter duos tabulæ proximos medianti.*

Resol. 1. SI datus differat a tabulari quoad primam notam, erit numerus respon-

pondens tabulari additis, vel demptis tot ad dexteram o, quot 1 prima nota log- mi dati excedit, vel deficit a prima nota tabularis, æqualis log- mo dato. Si cyphræ delendæ in illo numero non adsint, dividitur per 1 cum totidem cyphris (*sch*: *th*: 36.) 2. Quodsi datus differat a tabulari etiam quoad reliquas notas, a log- mo dato subtrahatur tabularis proxime minor, & hic subtrahatur etiam a proxime majori, fiatque ut differentia secunda ad primam, ita 1 (differentia numerorum A, & B respondentium log- mis, inter quos mediat datus lx) ad differentiam ipsius A ab x (*cor.*4. *th.*26.] inveniendam, qua ipsi A addita habebitur x (*ex sup. dem.*) est enim ex dem. in Probl. $lB - lA : lx - lA = B - A : x - A$.

Prob. 28. *INvenire fractionem log - mo defectivo respondentem.*

Resol. SUmatur denom. 100, vel 1000 &c. & ex ejus log- mo auferatur datus quæraturque in tabula numerus respondens log- mo residuo, hic erit numerator fractionis quæsitæ.

Dem. SIt den. assumptus A, ejusque log- mus defectivus $l\,x$, erit numerus respondens $lA - lx = \frac{A}{x}$, & respondens $-l\,x = \frac{1}{x}$, fractionis itaque inventæ num. est $\frac{A}{x}$, & den. est A, seu ipsa fractio est $\frac{A}{x} : A = \frac{A}{Ax} = \frac{1}{x}$ (*cor*: 3. *prob.* 19. & 2 *th.* 20.]

FINIS.